# Mecânica dos Sólidos

Pedro M. Ponces R. de Castro Camanho

Gabinete: L405

E-mail: pcamanho@fe.up.pt

# Aula #1

## Sumário:

- Introdução.
- Apresentação e objectivos da Unidade Curricular.
- Método de avaliação e bibiografia recomendada.
- Programa da Unidade Curricular.

## Docentes:

- Prof. Pedro Ponces Camanho.
- Prof. Lúcia Dinis.
- Prof. António Torres Marques.
- Prof. Francisco Pires.
- Prof. Carlos Reis Gomes.

## Horário de atendimento:

- Terça-Feira, 11:00-12:00
- Sexta-Feira, 11:00-12:00

# Objectivos da unidade curricular:

• Compreensão dos conceitos fundamentais da Mecânica dos Sólidos.

• Saber aplicar a Mecânica dos Sólidos no estudo das peças lineares sujeitas a solicitações simples de tracção/compressão, torção, flexão e suas combinações.

Escolaridade: 4 horas semanais
(6 ECTS, 162 horas de trabalho)

- 46 horas de aulas.
- **<u>111 horas de estudo individual.</u>**
- 5 horas para os exames.

# Relevância da Mecânica dos Sólidos para outras unidades curriculares:

• 3º ano: Mecânica das Estruturas I e II.

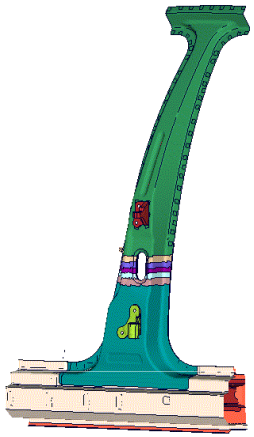
• 4º ano: Órgãos de Máquinas; Vibrações e Ruído; Iniciação ao Projecto.

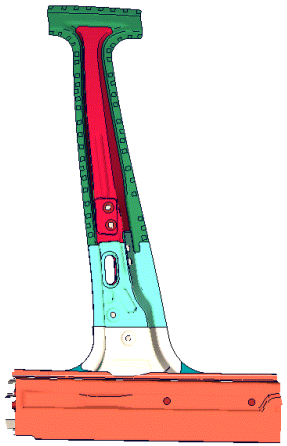
• 5º ano: <u>todas as unidades curriculares</u> da opção de Projecto e Construção Mecânica.

# Relevância da Mecânica dos Sólidos para outras unidades curriculares:

- Tese de Mestrado – Daimler Benz AG.









# Relevância da Mecânica dos Sólidos para outras unidades curriculares:

- Tese de Mestrado – Airbus Industries.





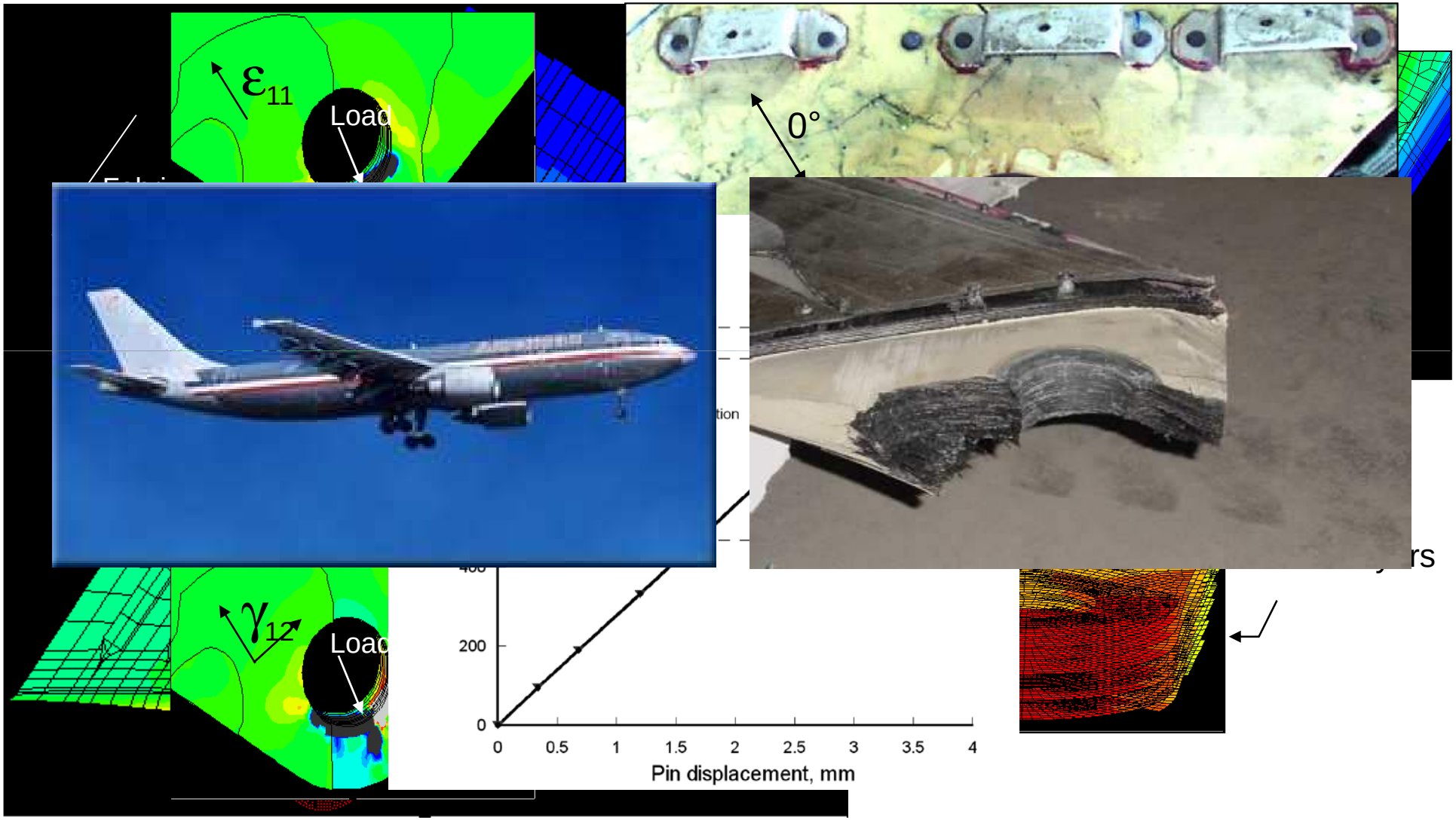
# Relevância da Mecânica dos Sólidos para outras unidades curriculares








# Relevância da Mecânica dos Sólidos para outras unidades curriculares



# Programa da unidade curricular:

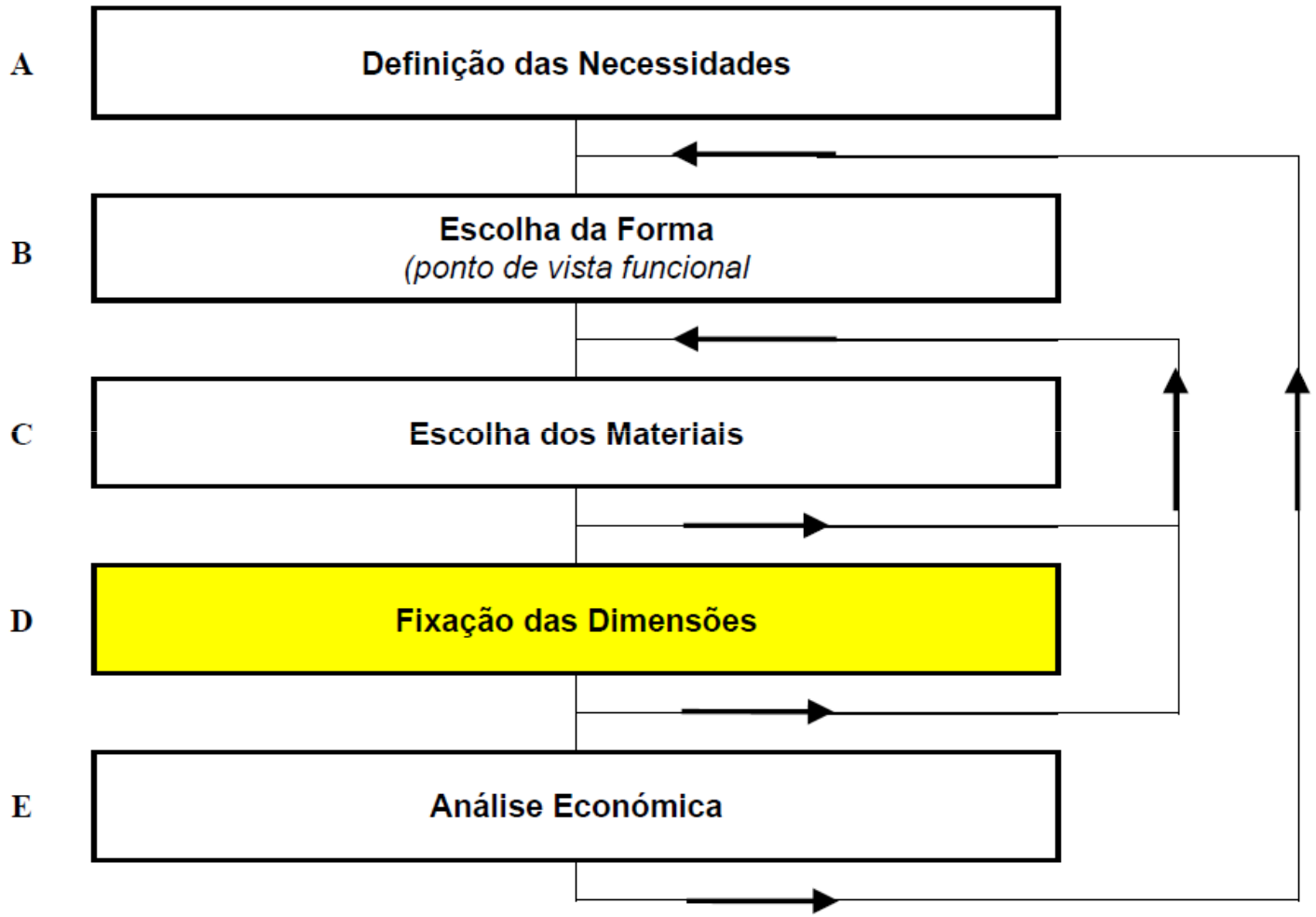
1. Análise das tensões – aulas 2-5.
2. Análise das deformações – aulas 6-8.
3. Relações tensão-deformação – aula 9.
4. Critérios de cedência – aula 10.
5. Resolução de exercícios/dúvidas – aula 11.
6. Diagramas de esforços – aula 12.
7. Torção de peças lineares – aulas 13-15.
8. Tensões de flexão em vigas – aulas 16-19.
9. Deflexão de vigas isostáticas – aula 20.
10. Resolução de exercícios/dúvidas – aulas 21-22.

**Modo de Avaliação:** avaliação distribuída sem exame final. 50% do primeiro teste + 50% do segundo teste. Em cada teste há uma nota mínima de 7 valores. No exame de recurso os alunos poderão repetir o primeiro teste ou o segundo (a nota a atribuir será a melhor em cada dessas provas) ou então realizar uma prova final com toda a matéria. A nota máxima de 20 valores será atribuída apenas com realização de uma prova oral. Não é permitida a consulta de qualquer texto de apoio à UC durante o exame – serão distribuídos formulários.

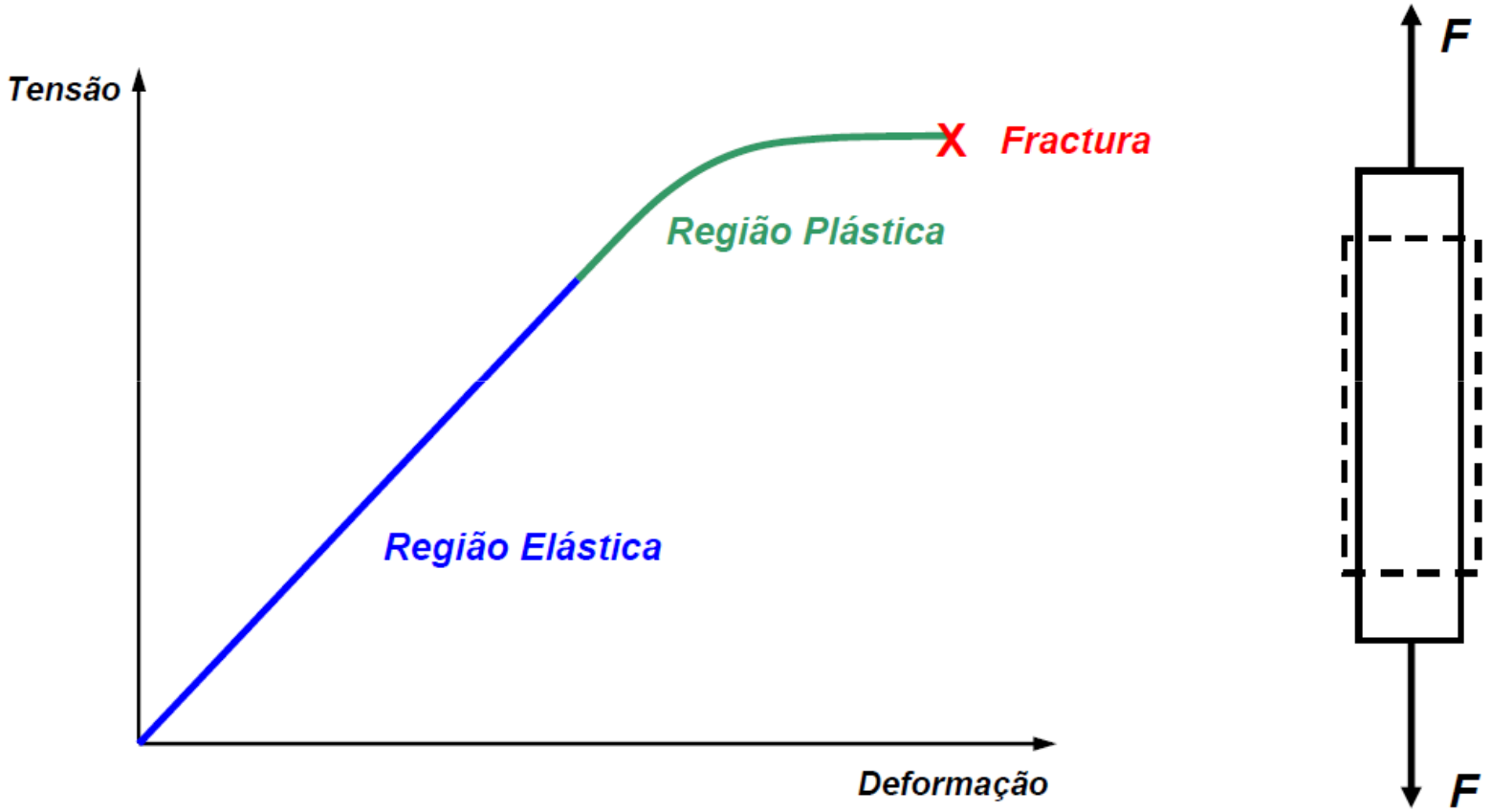
**Bibliografia principal**


- J.F. Silva Gomes, Mecânica dos Sólidos e Resistência dos Materiais, Ed. INEGI, Porto, 2004.
- S.P. Timoshenko, J.N. Goodier, Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York, 1970.
- J.P. Den Hartog, Advanced Strength of Materials, McGraw-Hill, New York, 1952.
- C.M. Branco, Mecânica dos Materiais, Fundação Calouste Gulbenkian, Lisboa, 1985.
- V. Féodosiev, Resistência dos Materiais, Lopes da Silva Ed., Porto, 1977.
- C. Massonet, Resistance des Materiaux, Dunod, Paris, 1968.

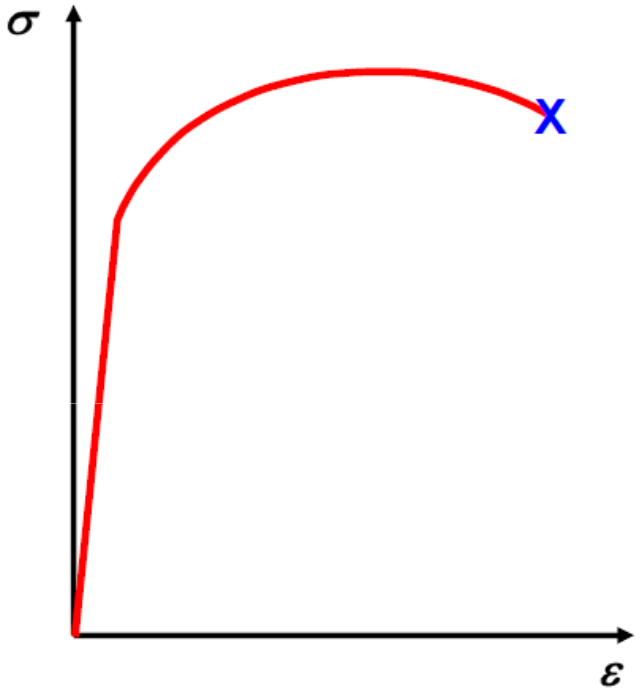
## Fases de um projecto



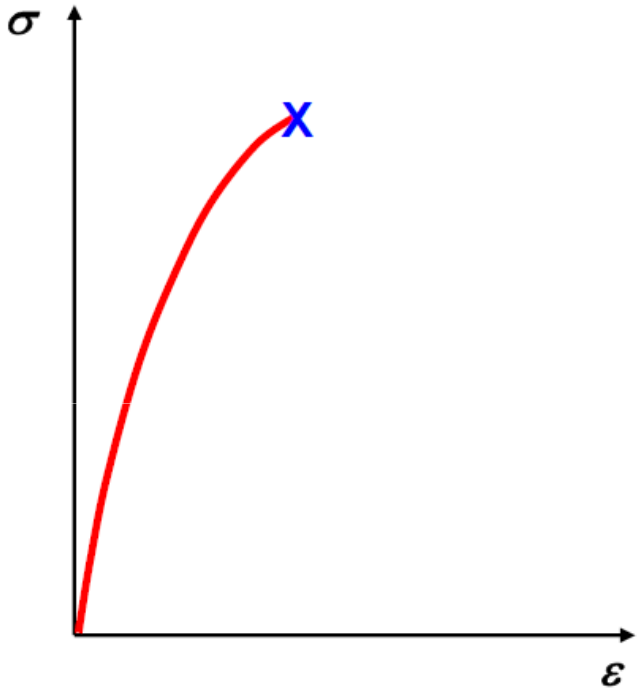
## Relação tensão-deformação



## Relação tensão-deformação

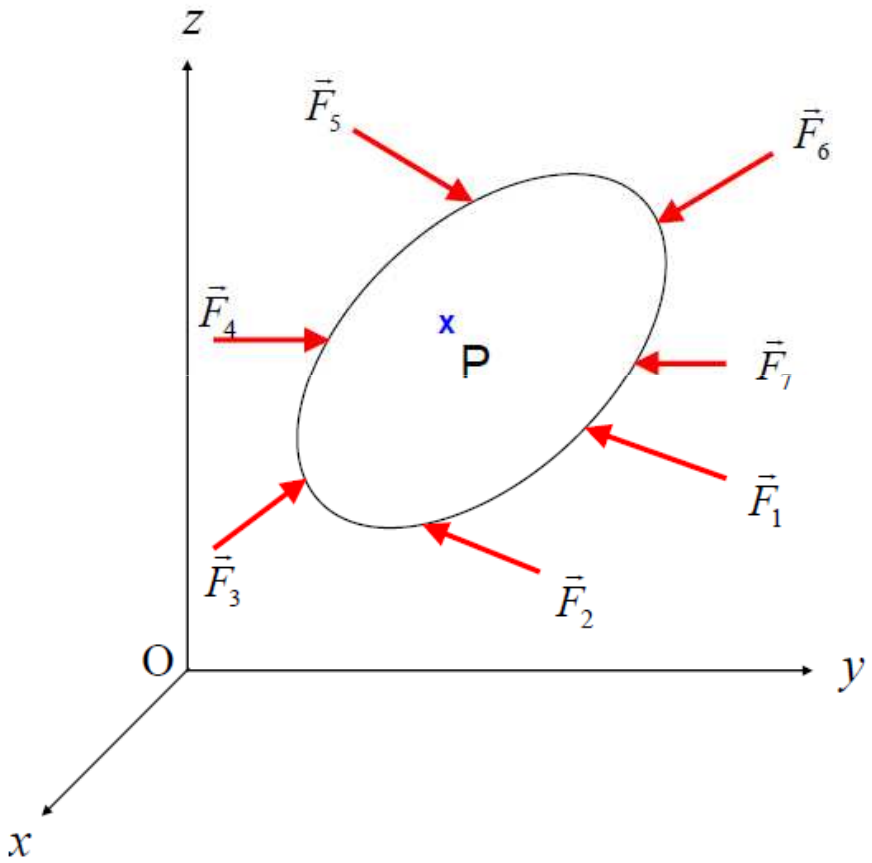



Material Dúctil




Material Frágil

## Equilíbrio estático de um sistema de forças




$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M}_P = 0 \end{cases}$$

# Aula #2

## Sumário:

- Introdução à análise das tensões.
- Componentes Cartesianas da tensão.
- Tensão para uma orientação arbitrária.
- Resolução dos problemas 1.2.1, 1.2.2, 1.2.3 e 1.2.5.

## Análise das tensões

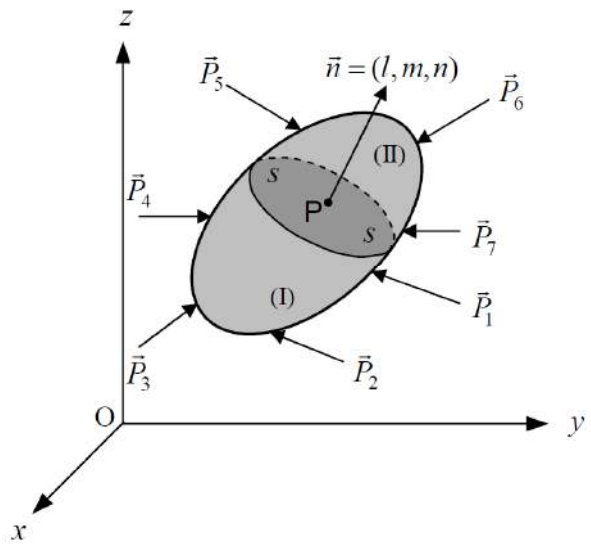
*Considerações iniciais*

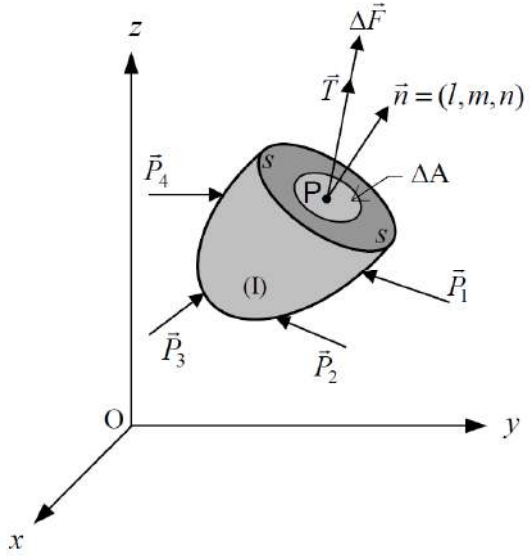
- Sólidos homogéneos, isotrópicos e elásticos.
- Análise macro-mecânica (material homogenizado).
- Comportamento linear-elástico.

*Conceito de tensão*

Forças de superfície: $\mathbf{P}_1$ ... $\mathbf{P}_n$.

Forças de volume: gravidade, electromagnéticas, inércia.




Tensão média em ΔA:

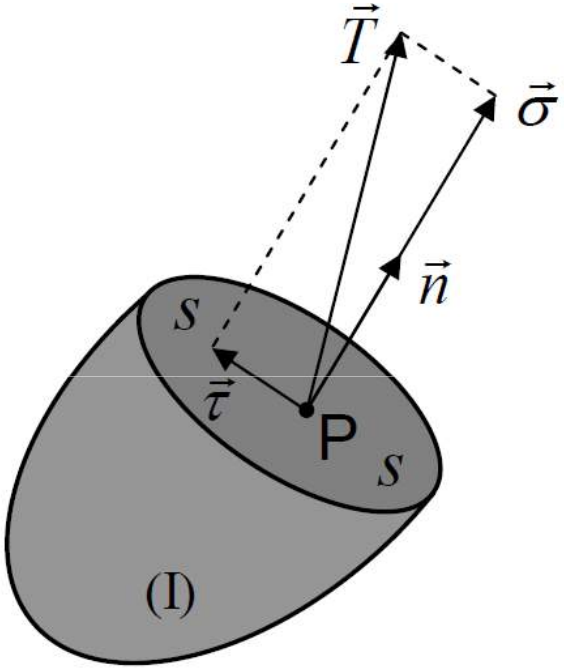
$$\vec{T}_m = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}$$

Tensão resultante no ponto P associada ao plano de corte definido por **n**:

$$\left.\begin{array}{l}\vec{T}(\mathrm{P},\vec{n})\\ \vec{n}=(l,\,m,\,n)\end{array}\right\} \vec{T} = \lim_{\Delta A\to 0}\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta A}$$

## Análise das tensões

*Tensão normal e tensão de corte*

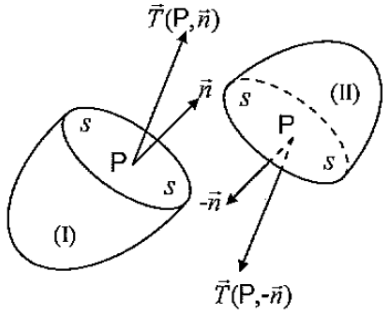



$\vec{T} = \vec{T}(P,\vec{n})$ ➡ Função do ponto P e da orientação da normal **n**.

$\vec{\sigma} = \vec{\sigma}(P,\vec{n})$ ➡ Tensão normal.

$\vec{\tau} = \vec{\tau}(P,\vec{n})$ ➡ Tensão tangencial ou de corte.

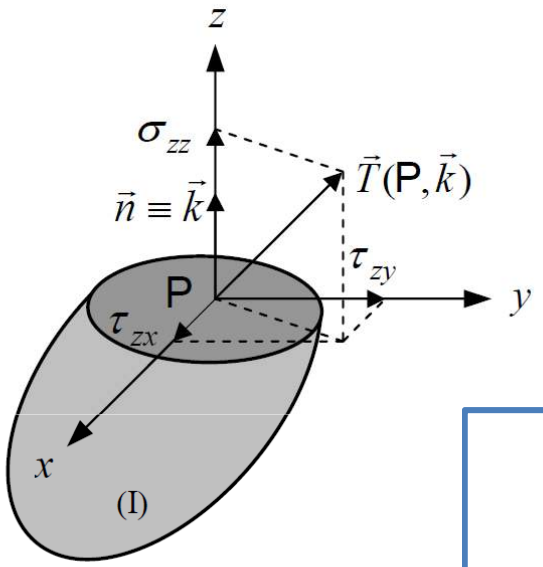
$$T^2 = \sigma^2 + \tau^2$$




$$\vec{T}\left(P,\vec{n}\right) = -\vec{T}\left(P,-\vec{n}\right)$$

## Análise das tensões

*Componentes Cartesianas da tensão*



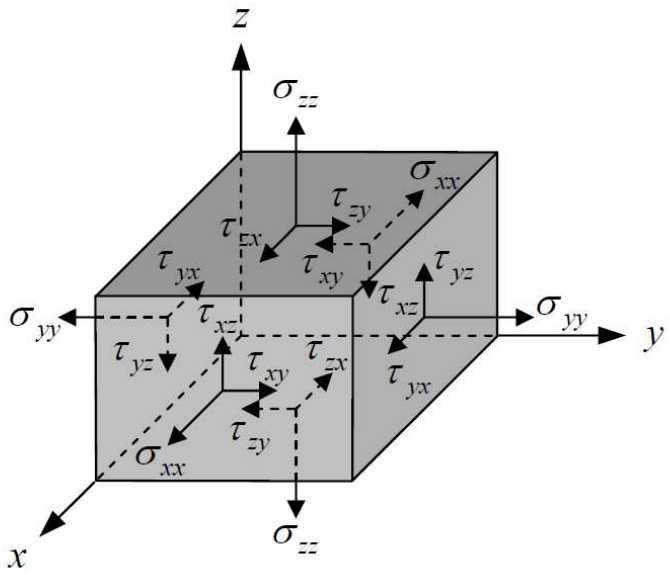

$$\vec{T}(P,\vec{k}) = \tau_{zx}\vec{i} + \tau_{zy}\vec{j} + \sigma_{zz}\vec{k}$$

$$\vec{T}(P,\vec{i}) = \sigma_{xx}\vec{i} + \tau_{xy}\vec{j} + \tau_{xz}\vec{k}$$

$$\vec{T}(P,\vec{j}) = \tau_{yx}\vec{i} + \sigma_{yy}\vec{j} + \tau_{yz}\vec{k}$$

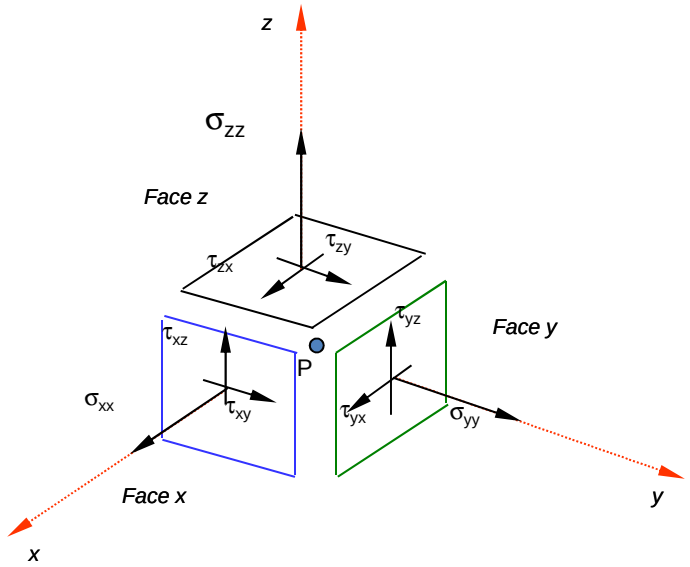
Matriz das tensões em P:

$$[\tau]_P = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{matrix} \vec{T}(P,\vec{i}) \\ \vec{T}(P,\vec{j}) \\ \vec{T}(P,\vec{k}) \end{matrix}$$



## Análise das tensões

*Componentes Cartesianas da tensão*



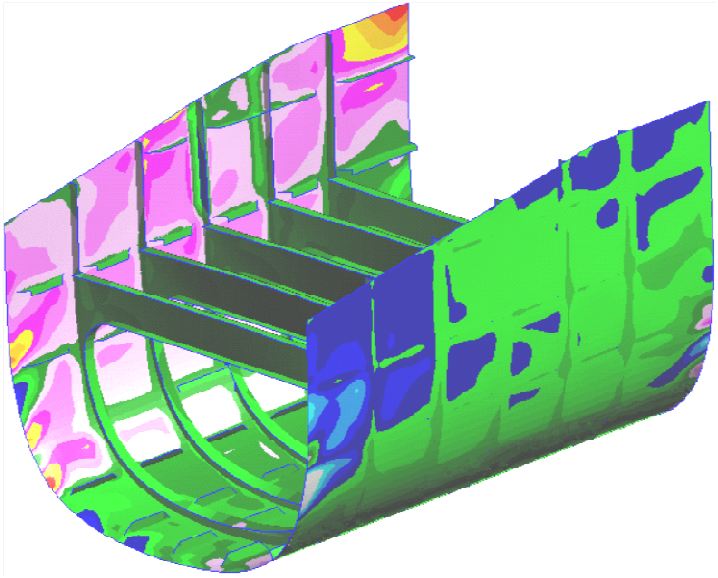

- Sentido da normal: do interior para o exterior do elemento.
- Faces positivas e faces negativas: sentido da respectiva normal.
- Tensão normal: (+) no sentido da normal – tracção; (-) no sentido oposto à normal – compressão.
- Tensões de corte $\tau_{ij}$: i – direcção da normal que define o plano no qual a tensão actua; j – direcção da tensão de corte. A tensão de corte é positiva se o seu sentido coincide com o sentido positivo do eixo coordenado em questão.

## Análise das tensões

*Notas*

- Unidades: $F/L^2$; $N/m^2$ (Pa).
- O estado de tensão de um corpo é representado por um campo tensorial $[\sigma(x, y, z)]$.

Exemplo: campo de tensões na fuselagem de um helicóptero:

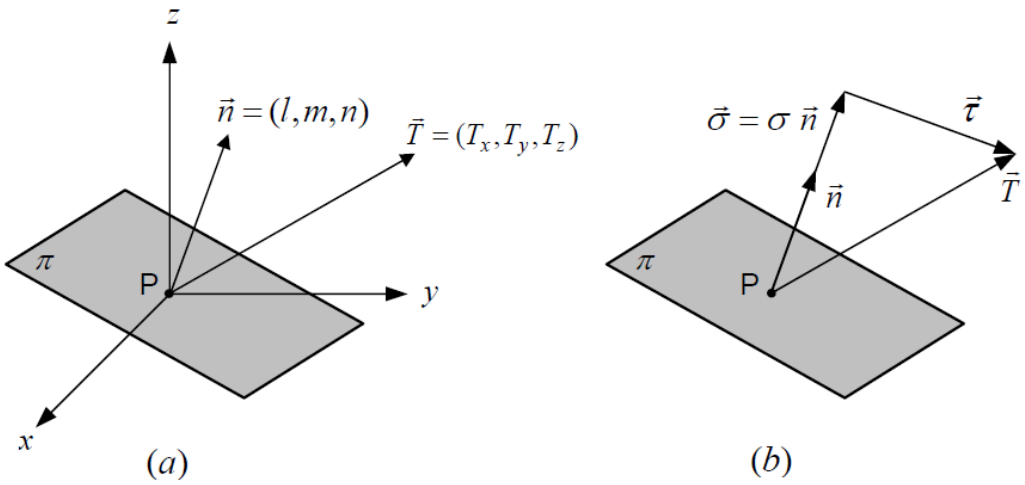


## Análise das tensões

*Tensão para uma orientação arbitrária*

• Em cada ponto P, a intensidade e a direcção do vector tensão resultante **T** dependem da orientação **n** do plano de corte.

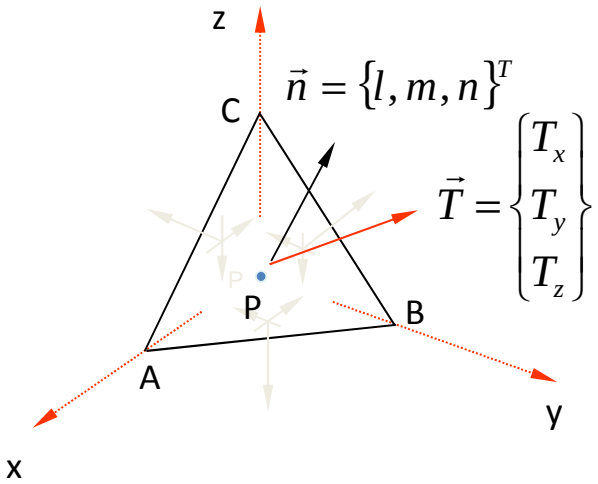
• É possível mostrar que, a partir das nove componentes da tensão, se pode determinar o vector tensão resultante nesse mesmo ponto para qualquer plano perpendicular ao versor **n** de cossenos directores $\{l,m,n\}^T$.



## Análise das tensões

*Tensão para uma orientação arbitrária*

Considere-se o tetraedro elementar PABC, em equilíbrio sob a acção das forças de volume correspondentes à sua massa e das forças de tensão que actuam em cada uma das respectivas faces.




Equação de equilíbrio segundo *Ox:*

Força por unidade de volume

$$A_o T_x - A_o l\sigma_{xx} - A_o m\tau_{yx} - A_o n\tau_{zx} + \frac{1}{3} A_o h F_x = 0$$

Área da face ABC

Volume

Fazendo h→0:

$$A_o T_x - A_o l\sigma_{xx} - A_o m\tau_{yx} - A_o n\tau_{zx} = 0$$

Equação de equilíbrio segundo *Oy:*

$$A_o T_y - A_o l\tau_{xy} - A_o m\sigma_{yy} - A_o n\tau_{zy} = 0$$

Equação de equilíbrio segundo *Oz:*

$$A_o T_z - A_o l\tau_{xz} - A_o m\tau_{yz} - A_o n\sigma_{zz} = 0$$

## Análise das tensões

*Tensão para uma orientação arbitrária*

$$T_x = l\sigma_{xx} + m\tau_{yx} + n\tau_{zx}$$
$$T_y = l\tau_{xy} + m\sigma_{yy} + n\tau_{zy}$$
$$T_z = l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_{zz}$$

Equação de Cauchy:

$$\{T\} = [\sigma]\{n\} = \begin{Bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix}$$

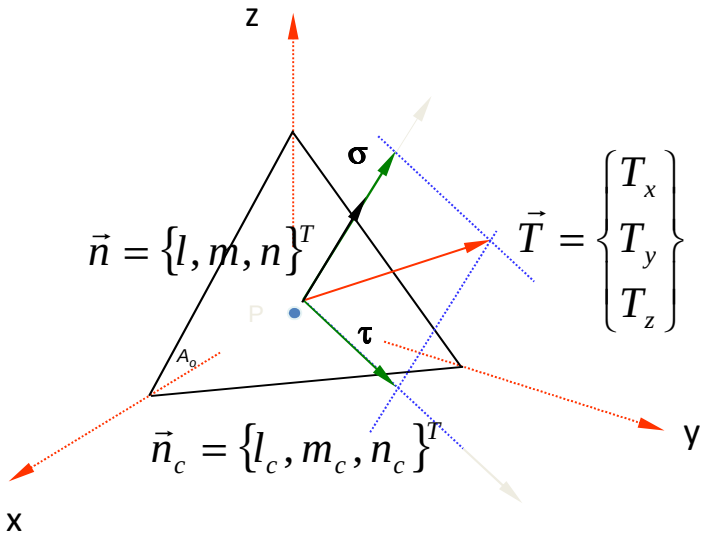


Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)

## Análise das tensões

*Tensão para uma orientação arbitrária*

Componentes σ e τ:




$$\sigma = \vec{T} \cdot \vec{n} \Rightarrow \sigma = lT_x + mT_y + nT_z \wedge \{T\} = [\sigma]\{n\}$$

$$\sigma = \sigma_{xx} l^2 + \sigma_{yy} m^2 + \sigma_{zz} n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{xz} nl$$

$$T^2 = \sigma^2 + \tau^2 \Rightarrow \tau^2 = T_x^2 + T_y^2 + T_z^2 - \sigma^2$$

Orientação da tensão de corte: $\vec{T} = \vec{\sigma} + \vec{\tau}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \sigma l + \tau l_c = T_x \\ \sigma m + \tau m_c = T_y \\ \sigma n + \tau n_c = T_z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l_c = \dfrac{T_x - l\sigma}{\tau} \\ m_c = \dfrac{T_y - m\sigma}{\tau} \\ n_c = \dfrac{T_z - n\sigma}{\tau} \end{cases}$$

## Análise das tensões

*Exercícios*

**1.2.1** Num determinado ponto P de um corpo material, a tensão resultante **T** para um plano de corte perpendicular ao eixo dos *zz é* **T** = $\{1,0,0\}^T$. Determine as componentes Cartesianas $\sigma_{zz}$, $\tau_{zx}$ e $\tau_{zy}$.

**1.2.2** Para o caso considerado no problema anterior, determine a componente normal ($\sigma$) e a componente de corte ($\tau$) da tensão no ponto mesmo ponto P e para o plano de corte indicado.

**1.2.3** No ponto P≡(1, 1, 1) de um corpo material, para um plano de corte ($\alpha$) definido pela equação x+y-z-1=0, a tensão resultante correspondente é **T** = $\{3,2,-1\}^T$. Determine, no ponto P e para o plano de corte considerado, as componentes normal e tangencial da tensão.

## Análise das tensões

*Exercícios*

**1.2.5** O estado de tensão num ponto de um corpo material é definido pelas seguintes componentes Cartesianas:

$$\sigma_{xx} = 80MPa \quad \sigma_{yy} = 160MPa \quad \sigma_{zz} = 100MPa$$
$$\tau_{xy} = 50MPa \quad \tau_{yz} = -75MPa \quad \tau_{zx} = 60MPa$$

a) Determine a componente normal e a componente de corte do vector tensão resultante para um plano cuja normal está inclinada de α = 68° e β= 35° em relação aos eixos x e y, respectivamente.

b) Determine os cossenos directores da tensão de corte no plano considerado.

# Aula #3

## Sumário:

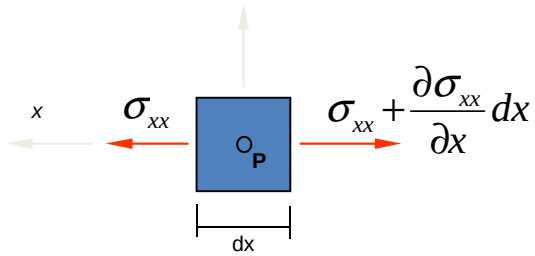
- Equações de equilíbrio.
- Lei de transformação das tensões.
- Tensões principais.
- Resoluções dos problemas 1.2.7, 1.2.8 e 1.2.9 (alíneas a) e b)).

## Análise das tensões

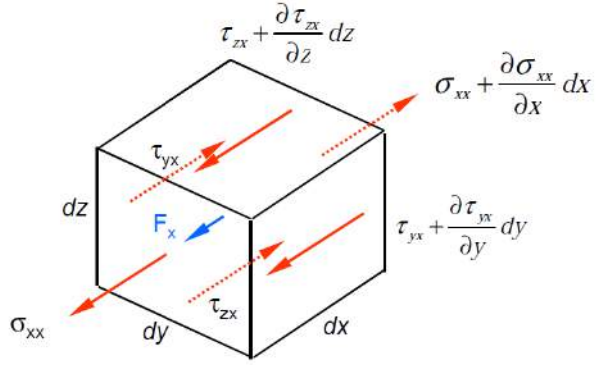
*Equações de equilíbrio*

O estado de tensão tem de ser compatível com as condições gerais de equilíbrio (estático ou dinâmico) do corpo em questão.

Variação da tensão ao longo do corpo




Equilíbrio segundo a direcção 0-x




$$\left[\sigma_{xx}+\frac{\partial\sigma_{xx}}{\partial x}dx-\sigma_{xx}\right]dydz+\left[\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy-\tau_{yx}\right]dxdz+\left[\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}dz-\tau_{zx}\right]dxdy+F_x dxdydz=0$$

## Análise das tensões

*Equações de equilíbrio*

Aplicando as equações de equilíbrio segundo as direcções 0-y e 0-z:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}+F_x=0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\dfrac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y}+\dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}+F_y=0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}+\dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z}+F_z=0 \end{cases}$$

Equações de equilíbrio estático. Têm de ser satisfeitas para todos os estados de tensão admissíveis.

$$\mathrm{div}[\sigma]+\vec{F}=\vec{0} \Leftrightarrow \nabla\cdot\sigma+F=0 \Leftrightarrow \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}+F_i=0$$

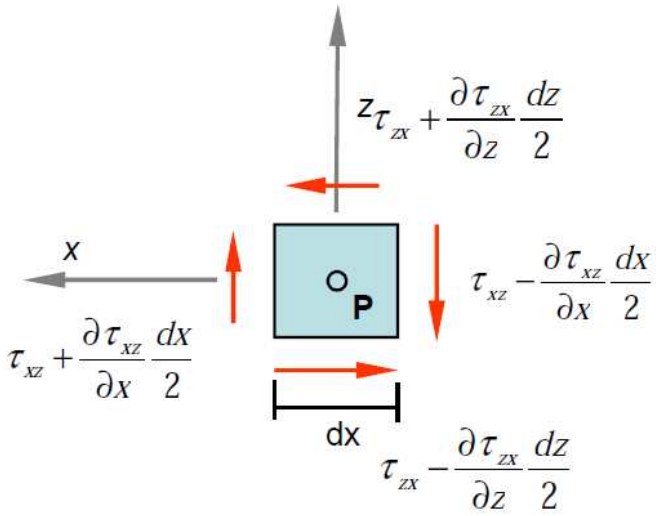
No caso dinâmico:

$$\mathrm{div}[\sigma]+\vec{F}=\rho\frac{d\vec{v}}{dt}$$

## Análise das tensões

*Simetria da matriz de tensões*

Equilíbrio de momentos segundo 0-y:




$$\left[\tau_{zx}+\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dx\,dy\frac{dz}{2}+\left[\tau_{zx}-\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial z}\frac{dz}{2}\right]dx\,dy\frac{dz}{2}-\left[\tau_{xz}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz\frac{dx}{2}-\left[\tau_{xz}-\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial x}\frac{dx}{2}\right]dy\,dz\frac{dx}{2}=0 \Rightarrow \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

Procedendo de forma idêntica para 0-x e 0-z:

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$
$$\tau_{yz}=\tau_{zy}$$

A matriz de tensões é simétrica e tem 6 componentes independentes:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

## Análise das tensões

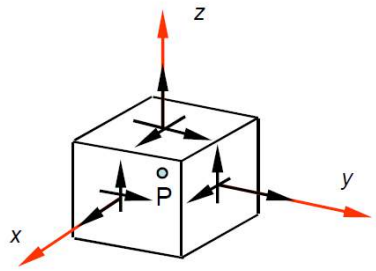
*Lei da reciprocidade das tensões*

Para quaisquer dois elementos de superfície que se considerem num mesmo ponto, a projecção da tensão em um deles sobre a normal ao outro é igual à projecção da tensão neste sobre a normal ao primeiro:

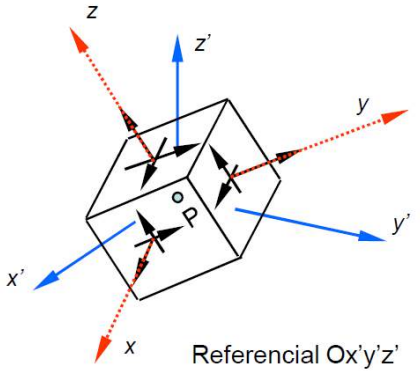
$$\vec{T}\left(P,\vec{n}\right)\cdot\vec{n}'=\vec{T}\left(P,\vec{n}'\right)\cdot\vec{n}$$

*Lei da transformação das tensões*

$$\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$




Referencial Oxyz

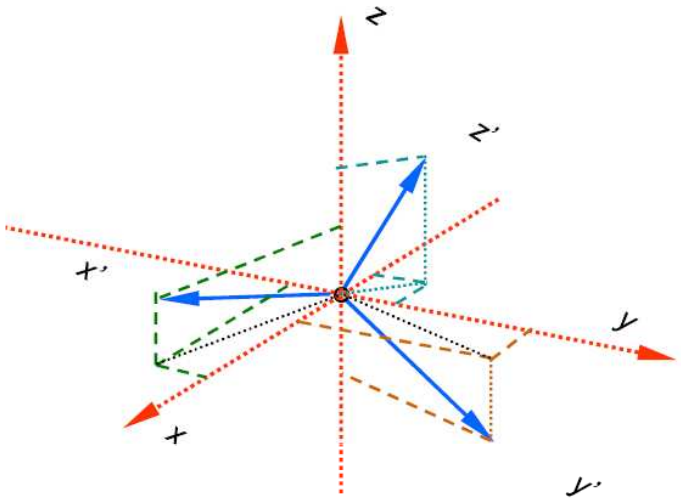



Referencial Ox'y'z'

$$\begin{bmatrix}\sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'}\\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} & \tau_{y'z'}\\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'z'}\end{bmatrix}$$

## Análise das tensões

*Lei da transformação das tensões*




$\vec{i}' = \{l_{x'}, m_{x'}, n_{x'}\}^T$ ➡ Cossenos directores de x' em (x,y,z)

$\vec{j}' = \{l_{y'}, m_{y'}, n_{y'}\}^T$ ➡ Cossenos directores de y' em (x,y,z)

$\vec{k}' = \{l_{z'}, m_{z'}, n_{z'}\}^T$ ➡ Cossenos directores de z' em (x,y,z)

Matriz de transformação de (x,y,z) em (x',y',z'):

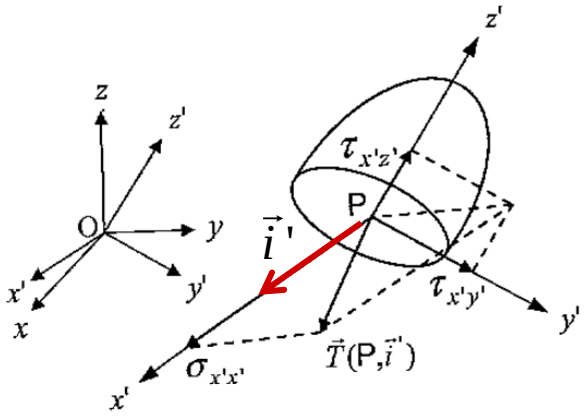
$$\vec{i}' = \{l_{x'}, m_{x'}, n_{x'}\}^T \Rightarrow [l] = \begin{bmatrix} l_{x'} & m_{x'} & n_{x'} \\ l_{y'} & m_{y'} & n_{y'} \\ l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \end{bmatrix}$$

Projecções de ***i'*** em Oxyz

Projecções de ***i*** em Ox'y'z'

## Análise das tensões

*Lei da transformação das tensões*




$$\vec{i}' = l_{x'}\vec{i} + m_{x'}\vec{j} + n_{x'}\vec{k}$$

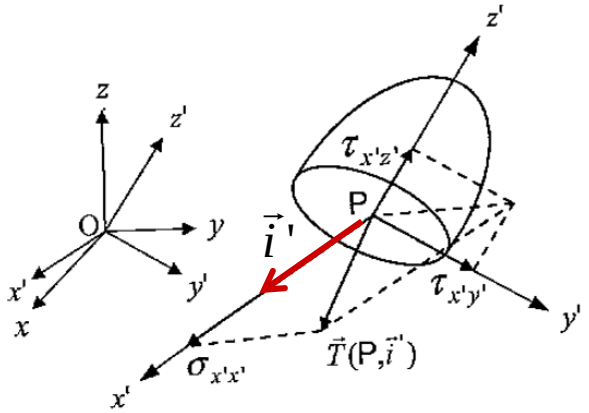
$$\sigma_{x'x'} = \vec{T}\left(P,\vec{i}'\right).\vec{i}'$$

$$\vec{T}\left(P,\vec{i}'\right) = [\sigma]\{i'\} = \left(l_{x'}\sigma_{xx} + m_{x'}\tau_{yx} + n_{x'}\tau_{zx}\right)\vec{i} + \left(l_{x'}\tau_{xy} + m_{x'}\sigma_{yy} + n_{x'}\tau_{zy}\right)\vec{j} + \left(l_{x'}\tau_{xz} + m_{x'}\tau_{yx} + n_{x'}\sigma_{zz}\right)\vec{k}$$

$$\sigma_{x'x'} = l_{x'}^2\sigma_{xx} + m_{x'}^2\sigma_{yy} + n_{x'}^2\sigma_{zz} + 2l_{x'}m_{x'}\tau_{xy} + 2m_{x'}n_{x'}\tau_{yz} + 2n_{x'}l_{x'}\tau_{zx}$$

## Análise das tensões

*Lei da transformação das tensões*




$$\sigma_{y'y'} = \vec{T}\left(P, \vec{j}'\right).\ \vec{j}'$$
$$\sigma_{z'z'} = \vec{T}\left(P, \vec{k}'\right).\ \vec{k}'$$
$$\tau_{x'y'} = \vec{T}\left(P, \vec{i}'\right).\ \vec{j}'$$
$$\tau_{y'z'} = \vec{T}\left(P, \vec{j}'\right).\ \vec{k}'$$
$$\tau_{z'x'} = \vec{T}\left(P, \vec{k}'\right).\ \vec{i}'$$

$$\sigma_{x'x'} = \sigma_{xx} l_{x'}^2 + \sigma_{yy} m_{x'}^2 + \sigma_{zz} n_{x'}^2 + 2\tau_{xy} l_{x'} m_{x'} + 2\tau_{yz} m_{x'} n_{x'} + 2\tau_{zx} n_{x'} l_{x'}$$
$$\sigma_{y'y'} = \sigma_{yy} m_{y'}^2 + \sigma_{zz} n_{y'}^2 + \sigma_{xx} l_{y'}^2 + 2\tau_{yz} m_{y'} n_{y'} + 2\tau_{zx} n_{y'} l_{y'} + 2\tau_{xy} l_{y'} m_{y'}$$
$$\sigma_{z'z'} = \sigma_{zz} n_{z'}^2 + \sigma_{xx} l_{z'}^2 + \sigma_{yy} m_{z'}^2 + 2\tau_{zx} n_{z'} l_{z'} + 2\tau_{xy} l_{z'} m_{z'} + 2\tau_{yz} m_{z'} n_{z'}$$
$$\tau_{x'y'} = \sigma_{xx} l_{x'} l_{y'} + \sigma_{yy} m_{x'} m_{y'} + \sigma_{zz} n_{x'} n_{y'} + \tau_{xy}(l_{x'} m_{y'} + m_{x'} l_{y'}) + \\ + \tau_{yz}(m_{x'} n_{y'} + n_{x'} m_{y'}) + \tau_{zx}(n_{x'} l_{y'} + l_{x'} n_{y'})$$
$$\tau_{y'z'} = \sigma_{yy} m_{y'} m_{z'} + \sigma_{zz} n_{y'} n_{z'} + \sigma_{xx} l_{y'} l_{z'} + \tau_{yz}(m_{y'} n_{z'} + n_{y'} m_{z'}) + \\ + \tau_{zx}(n_{y'} l_{z'} + l_{y'} n_{z'}) + \tau_{xy}(l_{y'} m_{z'} + m_{y'} l_{z'})$$
$$\tau_{z'x'} = \sigma_{zz} n_{z'} n_{x'} + \sigma_{xx} l_{z'} l_{x'} + \sigma_{yy} m_{z'} m_{x'} + \tau_{zx}(n_{z'} l_{x'} + l_{z'} n_{x'}) + \\ + \tau_{xy}(l_{z'} m_{x'} + m_{z'} l_{x'}) + \tau_{yz}(m_{z'} n_{x'} + n_{z'} m_{x'})$$

## Análise das tensões

*Lei da transformação das tensões*

$$[\sigma'] = [l][\sigma][l]^T$$

$$[\sigma'] = \begin{bmatrix} \sigma_{x'x'} & \tau_{x'y'} & \tau_{x'z'} \\ \tau_{y'x'} & \sigma_{y'y'} & \tau_{y'z'} \\ \tau_{z'x'} & \tau_{z'y'} & \sigma_{z'z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{x'} & m_{x'} & n_{x'} \\ l_{y'} & m_{y'} & n_{y'} \\ l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} l_{x'} & m_{x'} & n_{x'} \\ l_{y'} & m_{y'} & n_{y'} \\ l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \end{bmatrix}^T$$

## Análise das tensões

*Invariantes das tensões*

Funções escalares das componentes Cartesianas da tensão que são independentes do sistema de eixos coordenados considerado.

1º invariante: $$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \sigma_{x'x'} + \sigma_{y'y'} + \sigma_{z'z'}$$

2º invariante: $$I_2 = \sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 =$$
$$\sigma_{x'x'}\sigma_{y'y'} + \sigma_{y'y'}\sigma_{z'z'} + \sigma_{z'z'}\sigma_{x'x'} - \tau_{x'y'}^2 - \tau_{y'z'}^2 - \tau_{z'x'}^2$$

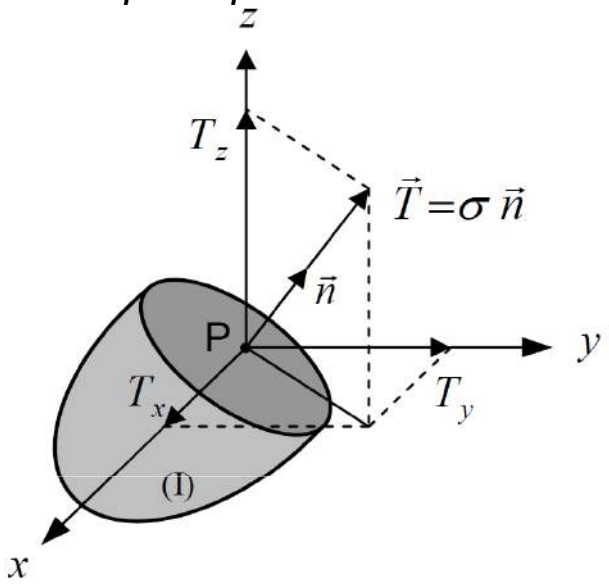
3º invariante: $$I_3 = \sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{xz}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} =$$
$$= \sigma_{x'x'}\sigma_{y'y'}\sigma_{z'z'} - \sigma_{x'x'}\tau_{y'z'}^2 - \sigma_{y'y'}\tau_{x'z'}^2 - \sigma_{z'z'}\tau_{x'y'}^2 + 2\tau_{x'y'}\tau_{x'z'}\tau_{y'z'}$$

Qualquer função que inclua qualquer um dos invariantes das tensões é também invariante. Por exemplo:

$$(\sigma_{xx} - \sigma_{yy})^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_{zz})^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_{xx})^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2) = 2I_1^2 - 6I_2$$

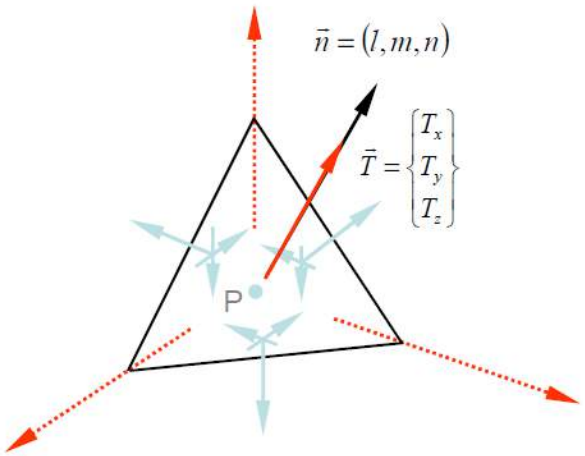
## Análise das tensões

*Tensões principais*




Condição de tensão principal: $\vec{T} = \sigma\,\vec{n}$

$$\begin{cases} T_x = \sigma\, l \\ T_y = \sigma\, m \\ T_z = \sigma\, n \end{cases}$$

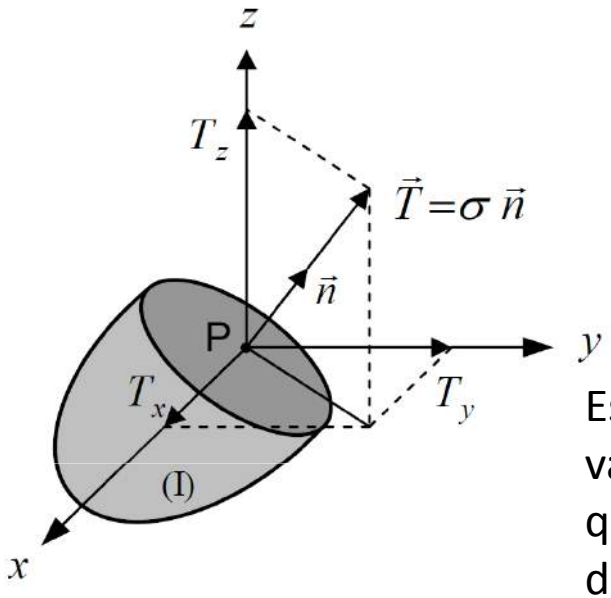



Aplicando a equação de Cauchy, $\{T\} = [\sigma]\{n\}$

$$\begin{cases} \sigma_{xx} l + \tau_{yx} m + \tau_{zx} n = \sigma\, l \\ \tau_{xy} l + \sigma_{yy} m + \tau_{zy} n = \sigma\, m \\ \tau_{xz} l + \tau_{yz} m + \sigma_{zz} n = \sigma\, n \end{cases}$$

## Análise das tensões

*Tensões principais*




$$\begin{cases} (\sigma_{xx}-\sigma)l + \tau_{yx}m + \tau_{zx}n = 0 \\ \tau_{xy}l + (\sigma_{yy}-\sigma)m + \tau_{zy}n = 0 \\ \tau_{xz}l + \tau_{yz}m + (\sigma_{zz}-\sigma)n = 0 \end{cases}$$

Este é um sistema de três equações lineares e homogéneas nas variáveis *l,m,n* (cossenos directores da direcção principal **n**). Para que o sistema admita solução para além do vector nulo, o determinante deve ser nulo, isto é:

$$\begin{vmatrix} \sigma_{xx}-\sigma & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma \end{vmatrix} = 0$$

## Análise das tensões

*Tensões principais*

Desenvolvendo o determinante:

$$\sigma^3 - (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\sigma^2 + (\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{zz}\sigma_{xx} - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma -$$
$$-(\sigma_{xx}\sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\tau_{yz}^2 - \sigma_{yy}\tau_{zx}^2 - \sigma_{zz}\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx}) = 0$$

$$\boxed{\sigma^3 - I_1\sigma^2 + I_2\sigma - I_3 = 0}$$

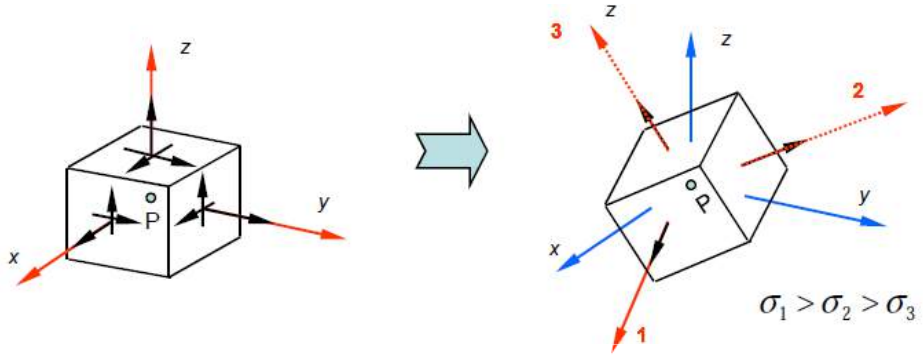
Trata-se de uma equação do terceiro grau em σ, cujas raízes $\sigma_1$, $\sigma_2$ e $\sigma_3$ são as três tensões principais no ponto considerado. Por convenção: $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Substituindo cada uma dessas tensões principais nas equações (slide #38) e resolvendo o sistema em relação a (l,m,n) obtêm-se os vectores que definem as direcções principais correspondentes $\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$ respectivamente.

## Análise das tensões

*Tensões principais*

Directamente da lei de reciprocidade das tensões resulta que: $\vec{n}_1 \perp \vec{n}_2 \perp \vec{n}_3$




Relativamente ao triedro principal (**$n_1$**, **$n_2$**, **$n_3$**) pode escrever-se para a tensão resultante **T** para um plano de corte definido pela sua normal **n**={l,m,n}$^T$:

$$\{T\} = [\sigma]\{n\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} l \\ m \\ n \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} T_1 = l\sigma_1 \\ T_2 = m\sigma_2 \\ T_3 = n\sigma_3 \end{cases}$$

## Análise das tensões

*Tensões principais*

As componentes da tensão normal e de corte são dadas por:

$$\sigma = \left\|\vec{\sigma}\right\| = \vec{T}\cdot\vec{n} \Rightarrow \sigma = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$$

$$\tau^2 = T^2 - \sigma^2 \Rightarrow \tau^2 = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2 =$$
$$= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2$$

## Análise das tensões

*Tensões principais*

Lei da transformação das tensões (relativa ao triedro principal):

$$
\begin{aligned}
\sigma_{x'x'} &= \sigma_1 l_{x'}^2 + \sigma_2 m_{x'}^2 + \sigma_3 n_{x'}^2 \\
\sigma_{y'y'} &= \sigma_1 l_{y'}^2 + \sigma_2 m_{y'}^2 + \sigma_3 n_{y'}^2 \\
\sigma_{z'z'} &= \sigma_1 l_{z'}^2 + \sigma_2 m_{z'}^2 + \sigma_3 n_{z'}^2 \\
\tau_{x'y'} &= \sigma_1 l_{x'} l_{y'} + \sigma_2 m_{x'} m_{y'} + \sigma_3 n_{x'} n_{y'} \\
\tau_{y'z'} &= \sigma_1 l_{y'} l_{z'} + \sigma_2 m_{y'} m_{z'} + \sigma_3 n_{y'} n_{z'} \\
\tau_{z'x'} &= \sigma_1 l_{z'} l_{x'} + \sigma_2 m_{z'} m_{x'} + \sigma_3 n_{z'} n_{x'}
\end{aligned}
$$

Invariantes das tensões:

$$
\begin{cases}
I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
I_2 = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1 \\
I_3 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3
\end{cases}
$$

## Análise das tensões

*Exercícios*

**1.2.7** Num determinado referencial global Oxyz, as componentes cartesianas da tensão num ponto P são as seguintes:

$$\sigma_{xx} = 1MPa \quad \sigma_{yy} = 2MPa \quad \sigma_{zz} = -1MPa$$
$$\tau_{xy} = 2MPa \quad \tau_{yz} = 1MPa \quad \tau_{zx} = -3MPa$$

Determine as componentes da tensão num referencial Ox'y'z', onde as orientações dos eixos x', y', z' são definidas pelos seguintes ângulos:

$a$)- $(x, x') = \pi/4$ ; $(y, y') = \pi/4$; $(z, z') = 0$.

$b$)- $(x, x') = \pi/2$ ; $(y, y') = \pi/2$; $(z, z') = 0$.

$c$)- $(x, x') = 0$ ; $(y, y') = \pi/2$; $(z, z') = \pi/2$.

$d$)- $(x, x') = \pi/2$ ; $(y, y') = 0$; $(z, z') = \pi/2$.

## Análise das tensões

*Exercícios*

**1.2.8** O estado de tensão num ponto P é definido pelas seguintes componentes Cartesianas:

$$\begin{array}{llllll} \sigma_{xx} & = 6MPa & \sigma_{yy} & = 3MPa & \sigma_{zz} & = 3MPa \\ \tau_{xy} & = 0 & \tau_{yz} & = 1MPa & \tau_{zx} & = 0 \end{array}$$

a) Poderá afirmar-se, à partida, que o plano yz é um plano principal de tensão? Justifique.

b) Determine as tensões principais no ponto considerado, bem como as respectivas direcções.

## Análise das tensões

*Exercícios*

**1.2.9** O campo das tensões num corpo de material elástico é definido, na ausência de forças de volume, pelas seguintes componentes cartesianas em cada ponto:

$$\sigma_{xx}=ax \;;\qquad \sigma_{yy}=2\text{-}cy \;;\qquad \sigma_{zz}=0$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=ax+2by+c \;;\qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}=\text{-}(by-2) \;;\qquad \tau_{xz}=\tau_{zx}=2ax-5z$$

onde a, b, c são parâmetros reais.

a) Determine a, b, c de modo que o campo das tensões acima definido seja compatível com as equações da teoria da elasticidade;

b) Determine as tensões principais no origem das coordenadas, bem como as respectivas direcções.

# Aula #4

## Sumário:

- Valores máximos e mínimos das tensões normais e de corte.
- Tensões octaédricas.
- Estado plano de tensão.
- Resolução das alíneas c) e d) do problema 1.2.9.

## Valores limites das tensões

*Tensão normal*

A tensão normal para um plano de corte qualquer, definido por **n**={l,m,n}$^T$, em que l, m e n são os cossenos directores de **n** relativamente ao triedro principal, é calculada como:

$$\sigma(l,m,n) = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2$$

O problema em análise corresponde à determinação dos valores estacionários da função σ , considerando que:

$$g(l,m,n) := l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0$$

Método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla\sigma(l,m,n) = \lambda\nabla g(l,m,n) \wedge g(l,m,n) = 0$$

## Valores limites das tensões

*Tensão normal*

Da equação anterior resulta:

$$\begin{cases} (\sigma_1 - \lambda)l = 0 \\ (\sigma_2 - \lambda)m = 0 \\ (\sigma_3 - \lambda)n = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluções admissíveis do sistema de equações:

$l = m = 0\ ,\ n = \pm 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_3 \Rightarrow \sigma = \sigma_3$ ➡ Tensão normal mínima.

$m = n = 0\ ,\ l = \pm 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_1 \Rightarrow \sigma = \sigma_1$ ➡ Tensão normal máxima.

$n = l = 0\ ,\ m = \pm 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_2 \Rightarrow \sigma = \sigma_2$

## Valores limites das tensões

*Tensão de corte*

A tensão de corte para um plano de corte qualquer, definido por **n**={l,m,n}$^T$, em que l, m e n são os cossenos directores de **n** relativamente ao triedro principal, é calculada como:

$$\tau^2(l,m,n) = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - \sigma^2 =$$
$$= l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - \left(l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3\right)^2$$

O problema em análise corresponde à determinação dos valores estacionários da função $\tau^2$, considerando que:

$$g(l,m,n) := l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0$$

Método dos multiplicadores de Lagrange:

$$\nabla\tau^2(l,m,n) = \lambda\nabla g(l,m,n) \wedge g(l,m,n) = 0$$

## Valores limites das tensões

*Tensão de corte*

Da equação anterior resulta:

$$\begin{cases} \left(\sigma_1^2 - 2\sigma\sigma_1 - \lambda\right) l = 0 \\ \left(\sigma_2^2 - 2\sigma\sigma_2 - \lambda\right) m = 0 \\ \left(\sigma_3^2 - 2\sigma\sigma_3 - \lambda\right) n = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

Soluções admissíveis do sistema de equações:

$l = m = 0\ ,\ n = \pm 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_3 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow$ Mínimo de $\tau^2$

$m = n = 0\ ,\ l = \pm 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_1 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow$ Mínimo de $\tau^2$

$n = l = 0\ ,\ m = \pm 1 \Rightarrow \vec{n} = \vec{n}_2 \Rightarrow \tau = 0 \Rightarrow$ Mínimo de $\tau^2$

## Valores limites das tensões

*Tensão de corte*

Soluções admissíveis do sistema de equações:

$$l = 0;\ m \neq 0;\ n \neq 0$$

$$\begin{aligned} \sigma_2^2 - 2\sigma\sigma_2 - \lambda &= 0 \\ \sigma_3^2 - 2\sigma\sigma_3 - \lambda &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \sigma_2^2 - \sigma_3^2 = 2\sigma(\sigma_2 - \sigma_3) \Rightarrow \sigma = \tfrac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3) \Rightarrow m^2 = n^2 = \tfrac{1}{2}$$

A tensão normal é dada por: $\sigma = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$

$l^2$ → =0

Substituindo em:

$$\tau^2 = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - \left(l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3\right)^2$$

Resulta:

$$\tau^2 = \tfrac{1}{2}(\sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \tfrac{1}{4}(\sigma_2 + \sigma_3)^2 = \tfrac{1}{4}(\sigma_2 - \sigma_3)^2$$

Valor estacionário da tensão de corte:

$$\tau = \tfrac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)$$

$$\vec{n} = (0, \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2}, \pm\tfrac{\sqrt{2}}{2})$$

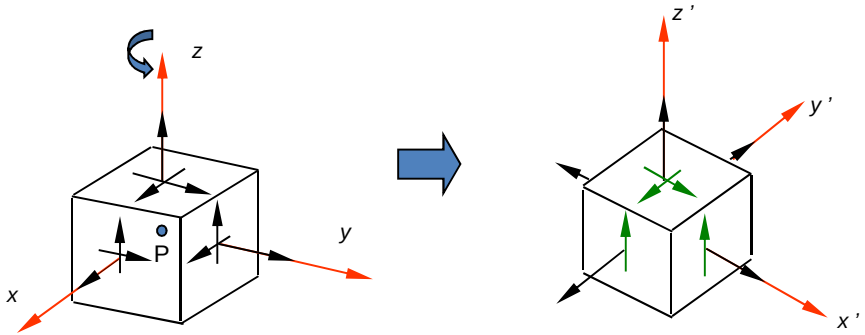
## Valores limites das tensões

*Tensão de corte*

| | l | m | n | σ | τ |
|---|---|---|---|---|---|
| Mínimos de τ | 0 | 0 | ± 1 | $\sigma_3$ | 0 |
| | 0 | ± 1 | 0 | $\sigma_2$ | 0 |
| | ± 1 | 0 | 0 | $\sigma_1$ | 0 |
| Máximos de τ | 0 | $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{(\sigma_2+\sigma_3)}{2}$ | $\frac{(\sigma_2-\sigma_3)}{2}$ |
| | $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 0 | $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\frac{(\sigma_1+\sigma_3)}{2}$ | $\frac{(\sigma_1-\sigma_3)}{2}$ |
| | $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ | $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ | 0 | $\frac{(\sigma_1+\sigma_2)}{2}$ | $\frac{(\sigma_1-\sigma_2)}{2}$ |

Dado que $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ o valor máximo de τ é $\tau = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)$ para: $\vec{n} = (\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$

## Tensões principais secundárias




$$\sigma_{x'x'} = \frac{(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})}{2} + \frac{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sen2\theta$$

$$\sigma_{y'y'} = \frac{(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})}{2} - \frac{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})}{2}\cos 2\theta - \tau_{xy} sen2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})}{2} sen2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

As tensões de corte serão nulas quando for satisfeita a seguinte equação : $tg2\theta = \frac{2\tau_{xy}}{(\sigma_{xx}-\sigma_{yy})}$

Dado que $tg2\theta = tg(2\theta+\pi)$ existem duas direcções mutuamente perpendiculares para as quais $\tau_{xy} = 0$

## Tensões principais secundárias

$$\left.\frac{\partial \sigma_{x'x'}}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_p} = 0 \wedge \left.\frac{\partial \sigma_{y'y'}}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_p} = 0$$

Logo, as duas direcções definidas por $\theta_p$ correspondem às componentes normais máxima e mínima no plano 0xy:

$$\left.\begin{aligned} \sigma_1^{'} &= \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \\ \sigma_2^{'} &= \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \end{aligned}\right\}$$ Tensões principais secundárias no plano 0xy.

## Tensão hidrostática e tensão desvio

Estado de tensão isotrópico ou estado de tensão hidrostático:

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}-p & 0 & 0\\ 0 & -p & 0\\ 0 & 0 & -p\end{bmatrix};\{T\}=[\sigma]\{n\}=\begin{Bmatrix}-pl\\ -pm\\ -pn\end{Bmatrix}=-p\{n\}\therefore\tau=0\;\forall\{n\}$$

Para um estado de tensão arbitrário: $[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{yx} & \tau_{zx}\\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{zy}\\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$

Tensão média ou tensão hidrostática:

$$\sigma_m=\frac{1}{3}\mathrm{tr}[\sigma]=\frac{1}{3}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz})=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)=\frac{1}{3}I_1$$

## Tensão hidrostática e tensão desvio

Tensões de desvio:

$$\begin{aligned}
\sigma'_{xx} &= \sigma_{xx} - \sigma_m &&= \tfrac{1}{3}(2\sigma_{xx} - \sigma_{yy} - \sigma_{zz}) \\
\sigma'_{yy} &= \sigma_{yy} - \sigma_m &&= \tfrac{1}{3}(2\sigma_{yy} - \sigma_{zz} - \sigma_{xx}) \\
\sigma'_{zz} &= \sigma_{zz} - \sigma_m &&= \tfrac{1}{3}(2\sigma_{zz} - \sigma_{xx} - \sigma_{yy})
\end{aligned}$$

A matriz das tensões pode ser escrita como:

$$[\sigma] = [\sigma_m] + [\sigma_d]$$

Estado de tensão hidrostático. (variação de volume sem distorção)

$$\begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix}$$

Estado de tensão de desvio.

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

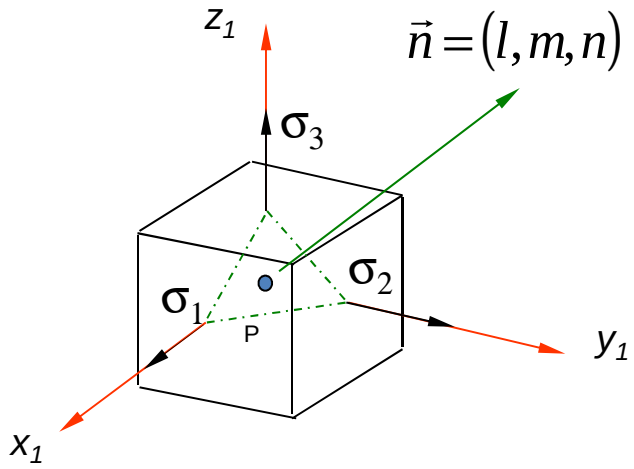
$I'_1 = \mathrm{tr}[\sigma_d] = 0$

(Distorção sem variação de volume)

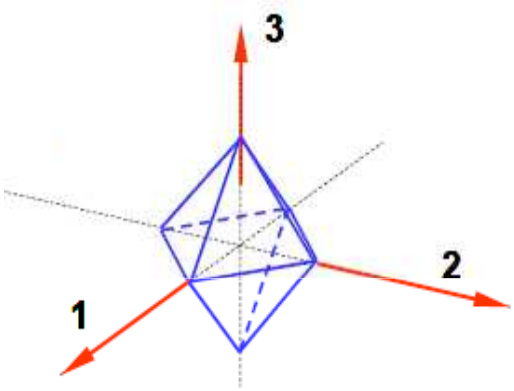
$$[\sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \sigma_m & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \sigma_m & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \sigma_m \end{bmatrix}$$

## Tensão de corte octaédrica

Uma face octaédrica é caracterizada por um versor que tem o mesmo ângulo relativamente a cada um dos eixos pricipais de tensão.




8 planos octaédricos:




Cossenos directores de **n** relativamente ao sistema de eixos principal de tensão:

$$l^2+m^2+n^2=1$$

$$l=\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ m=\pm\frac{1}{\sqrt{3}};\ n=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

## Tensão de corte octaédrica

Tensão normal nos planos octaédricos

$$\sigma_{oct} = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 = \tfrac{1}{3}\sigma_1 + \tfrac{1}{3}\sigma_2 + \tfrac{1}{3}\sigma_3 = \sigma_m$$

Tensão de corte nos planos octaédricos (tensão de corte octaédrica)

$$\tau^2 = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2 =$$
$$= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2$$ (slide #41)

$$\tau_{oct}^2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 l^2 m^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 m^2 n^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 n^2 l^2 =$$
$$= \tfrac{1}{9}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

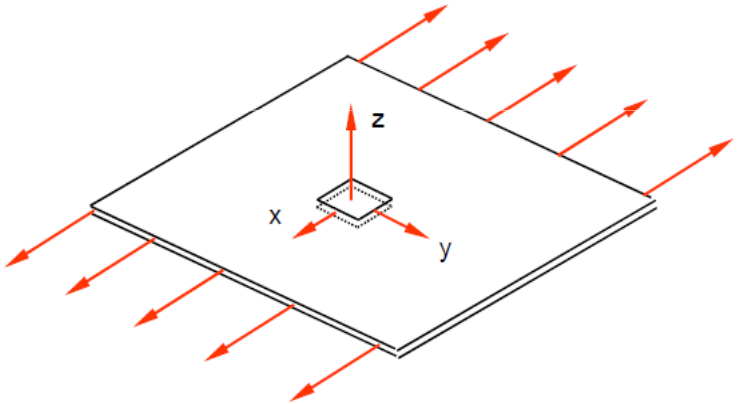
$$\tau_{oct}^2 = \tfrac{1}{9}\left(2I_1^2 - 6I_2\right)$$

$$\tau_{oct}^2 = \tfrac{1}{9}\left(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{yy} - \sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{zz} - \sigma_{xx}\right)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2$$

## Estado plano de tensão

- Forças de volume e forças de superfície, todas paralelas ao plano Oxy.
- As únicas componentes Cartesianas da tensão que são eventualmente não nulas são $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$, $\tau_{xy}$ , isto é, $\sigma_{zz} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$.

Exemplo: placa solicitada por forças no próprio plano:




Neste caso:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{xx}(x,y)$$

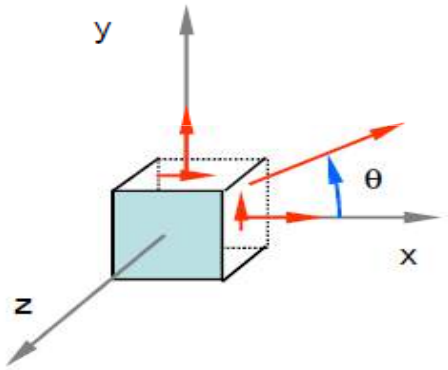
$$\sigma_{yy} = \sigma_{yy}(x,y)$$

$$\tau_{xy} = \tau_{xy}(x,y)$$

## Estado plano de tensão

Em qualquer ponto, a direcção coordenada Oz é uma direcção principal de tensão, à qual corresponde sempre uma tensão principal nula.

Qualquer plano de corte perpendicular ao plano da placa fica identificado pelo ângulo θ que a respectiva normal faz com a direcção do eixo Ox




$$l = \cos(\theta), \qquad m = sen(\theta), \qquad n = 0$$

$$\sigma = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sen2\theta$$

$$\tau = -\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2} sen2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

## Estado plano de tensão

A tensão de corte τ anula-se para um ângulo $\theta_p$ tal que: $$tg2\theta_p = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}$$

Atendendo a que $tg(2\theta_p) = tg(2\theta_p + \pi)$, existem duas direcções mutuamente perpendiculares que satisfazem a condição anterior. Essas são as duas direcções principais de tensão no plano (x,y), as quais correspondem às tensões principais $\sigma_1$ e $\sigma_2$ no ponto considerado.

Substituindo o valor do ângulo $\theta_p$ para a componente normal σ, obtém-se:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$

## Análise das tensões

*Exercícios*

**1.2.9** O campo das tensões num corpo de material elástico é definido, na ausência de forças de volume, pelas seguintes componentes cartesianas em cada ponto:

$$\sigma_{xx}=ax \;;\qquad \sigma_{yy}=2\text{-}cy \;;\qquad \sigma_{zz}=0$$

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}=ax+2by+c \;;\qquad \tau_{yz}=\tau_{zy}=\text{-}(by-2) \;;\qquad \tau_{xz}=\tau_{zx}=2ax-5z$$

onde a, b, c são parâmetros reais.

c) Nesse mesmo ponto (origem das coordenadas), determine o valor da tensão de corte máxima, e o plano e a direcção segundo os quais actua.

d) Identifique os planos octaédricos na origem e calcule as respectivas tensões octaédricas (normal e de corte).

# Aula #5

## Sumário:

- Construção de Mohr.
- Equações de equilíbrio em coordenadas cilindricas.
- Problema 1.2.10

## Construção de Mohr

$$\sigma = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3$$

$$\tau^2 = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - \underbrace{\left(l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3\right)}_{\sigma}$$

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

$$m^2 = 1 - l^2 - n^2 \Rightarrow \sigma = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \Rightarrow n^2 = \frac{\sigma - l^2(\sigma_1 - \sigma_2) - \sigma_2}{(\sigma_3 - \sigma_2)}$$

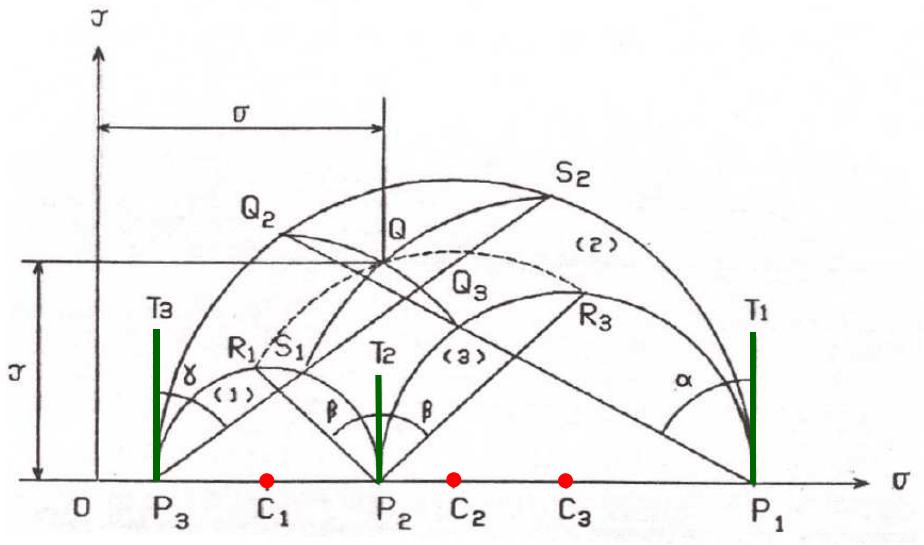
Equação de uma circunferência

$$\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 = l^2(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2$$

Centro, $\frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}$

Raio, $\sqrt{l^2(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1) + \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2}$

## Construção de Mohr



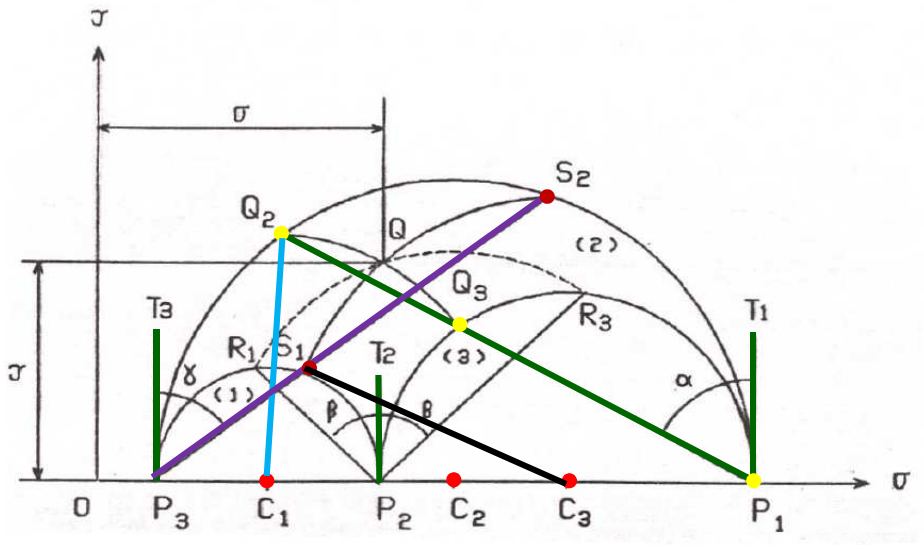

1. Marcar sobre o eixo das abcissas os pontos $P_1$, $P_2$ e $P_3$, de tal modo que:

$$OP_1 = \sigma_1, \quad OP_2 = \sigma_2, \quad OP_3 = \sigma_3$$

2. Tomando os segmentos $P_1P_2$, $P_2P_3$ e $P_3P_1$ como diâmetros, desenhar os três círculos de Mohr com centros nos pontos médios $C_3$, $C_2$ e $C_1$, respectivamente.

3. Pelos pontos $P_1$, $P_2$ e $P_3$ traçar as rectas $P_1T_1$, $P_2T_2$ e $P_3T_3$, respectivamente, perpendiculares ao eixo das abcissas.

## Construção de Mohr



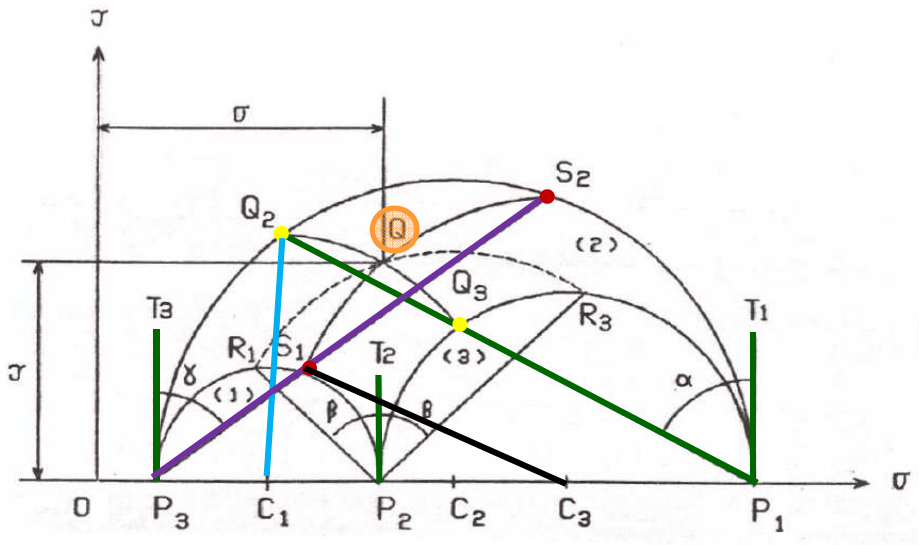

3. Marcar o ângulo α=arcos(l) a partir da vertical $P_1T_1$ e desenhar a recta $P_1Q_3Q_2$, que intersecta os círculos de Mohr (2) e (3) nos pontos $Q_2$ e $Q_3$.

4. Com centro no ponto $C_1$, desenhar o arco de circunferência $Q_2QQ_3$ , com raio $C_1Q_2$.

5. A partir da vertical $P_3T_3$, marcar o ângulo γ=arcos(n) e desenhar a recta $P_3S_1S_2$ que intersecta os círculos de Mohr (1) e (2) nos pontos $S_1$ e $S_2$, respectivamente.

6. Com centro no ponto $C_3$, desenhar o arco de circunferência $S_1QS_2$ , com um raio igual a $C_3S_1$.

## Construção de Mohr



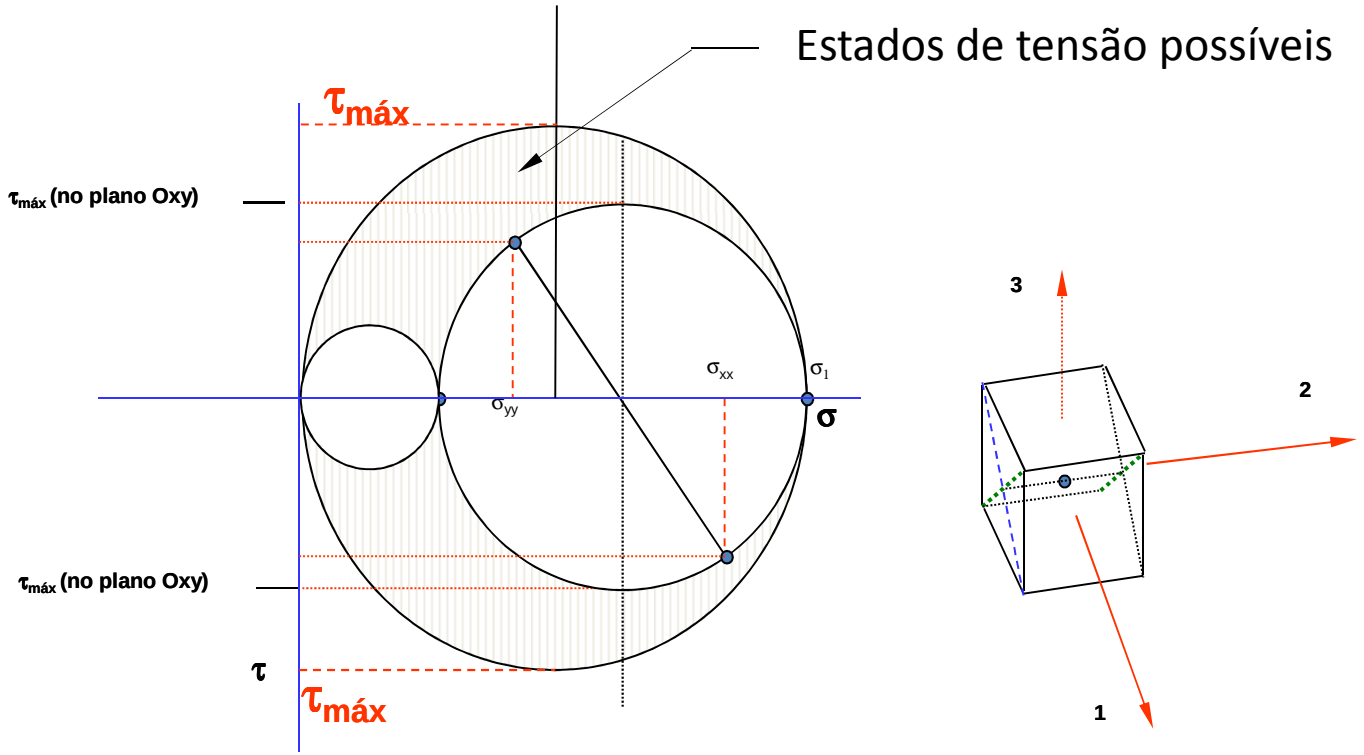

7. A intersecção dos dois arcos de circunferência define o ponto Q representativo da tensão para o plano considerado.

As coordenadas do ponto Q no plano (σ,τ) são tais que a abcissa é igual à componente normal da tensão e a ordenada igual à componente tangencial, para o plano de corte definido por l=cos(α) , m=cos(ß) , n=cos(γ):

$$\sigma = l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3 \qquad \tau^2 = l^2\sigma_1^2 + m^2\sigma_2^2 + n^2\sigma_3^2 - (l^2\sigma_1 + m^2\sigma_2 + n^2\sigma_3)^2$$

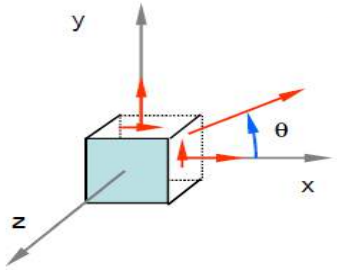
## Construção de Mohr

Neste caso: $\sigma_1 \neq \sigma_2$ e $\sigma_3 = 0$ $\qquad \tau_{máx} = \dfrac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}$



## Construção de Mohr

*Estado plano de tensão*




$$\sigma_{x'x'} = \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} + \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sen2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = \frac{\sigma_{yy}-\sigma_{xx}}{2} sen2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

ou:

$$\sigma_{x'x'} - \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2} = \frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\cos 2\theta + \tau_{xy} sen2\theta$$

$$\tau_{x'y'} = -\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2} sen2\theta + \tau_{xy}\cos 2\theta$$

Quadrando e somando as duas expressões anteriores obtém-se, após simplificação:

$$\left(\sigma_{x'x'} - \frac{\sigma_{xx}+\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = \left(\frac{\sigma_{xx}-\sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2$$

## Construção de Mohr

*Estado plano de tensão*

Equivalente à equação de uma circunferência no plano (**σ,τ**) , isto é;

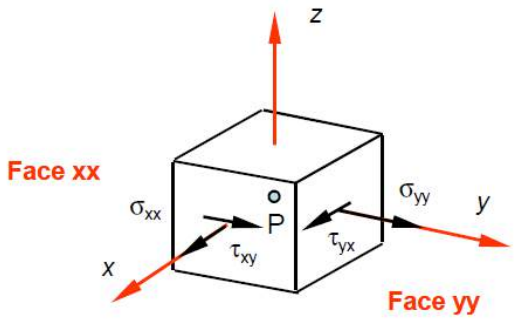
$$\left(\sigma_{x'x'} - a\right)^2 + \tau_{x'y'}^2 = b^2$$

$$a = 0C = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2} \quad \Rightarrow \text{ Absissa do centro}$$

$$b = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2} \quad \Rightarrow \text{ Raio da circunferência}$$

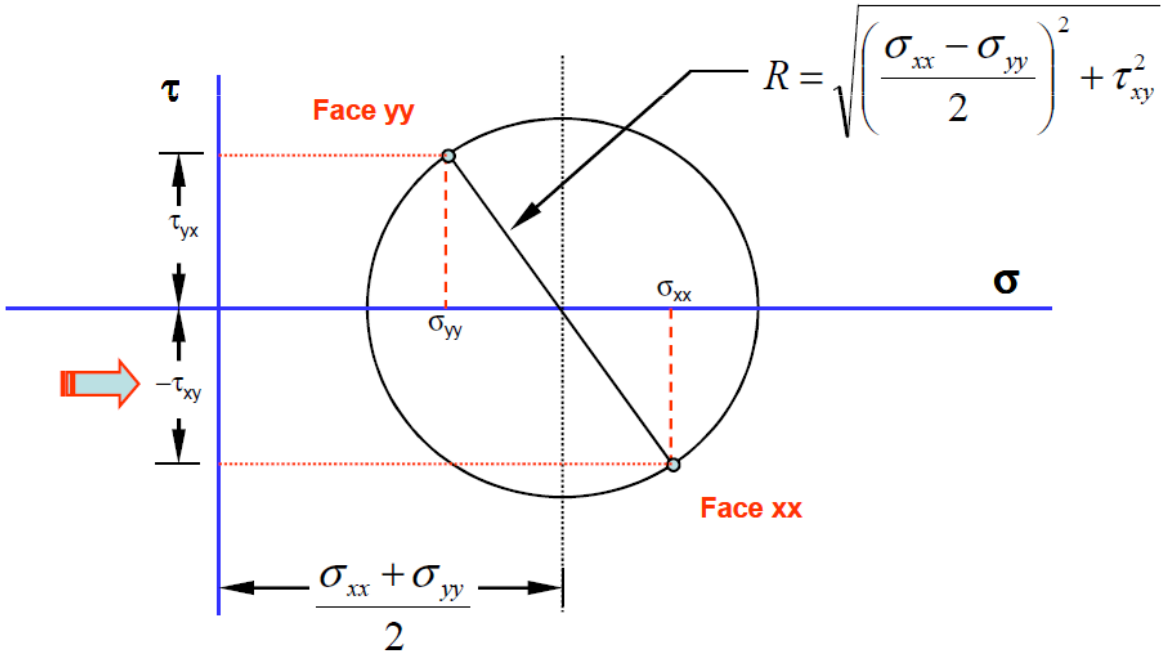
## Construção de Mohr

*Estado plano de tensão*




$$a = 0C = \frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy}}{2}$$

$$b = R = \sqrt{\left(\frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{2}\right)^2 + \tau_{xy}^2}$$



## Construção de Mohr

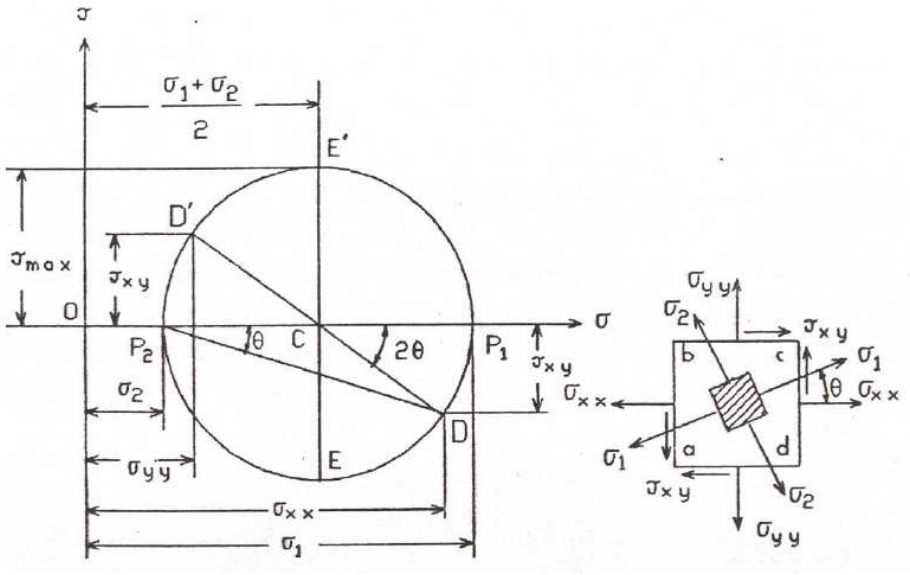
*Estado plano de tensão*

A tensão normal σ e a tensão de corte τ para um plano oblíquo qualquer definido pelo ângulo θ, relativamente à direcção principal $\mathbf{n_1}$ são dadas pelas expressões seguintes:

$$\sigma = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\cos 2\theta$$

$$\tau = -\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} sen2\theta\,.$$

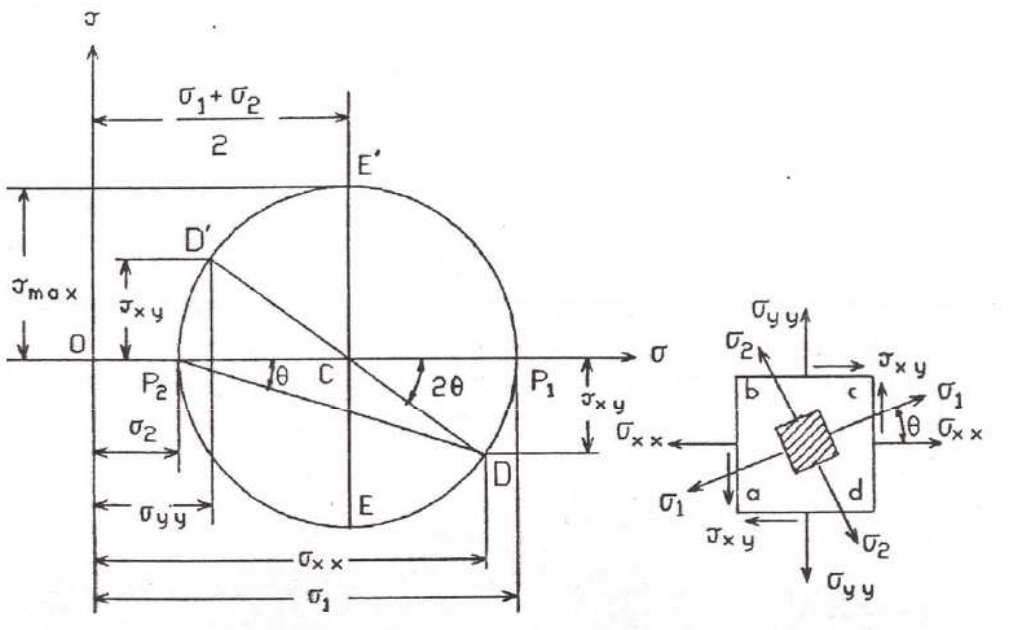
Estas duas componentes podem ser interpretadas como sendo as coordenadas do ponto D sobre o círculo de Mohr desenhado num diagrama (σ,τ), conforme ilustrado na figura.




O centro do círculo de Mohr é o ponto C sobre o eixo das abcissas, à distância $(\sigma_1+\sigma_2)/2$ da origem do diagrama, sendo o respectivo raio igual à semi-diferença das tensões principais, isto é, igual a $(\sigma_1-\sigma_2)/2$.

## Construção de Mohr

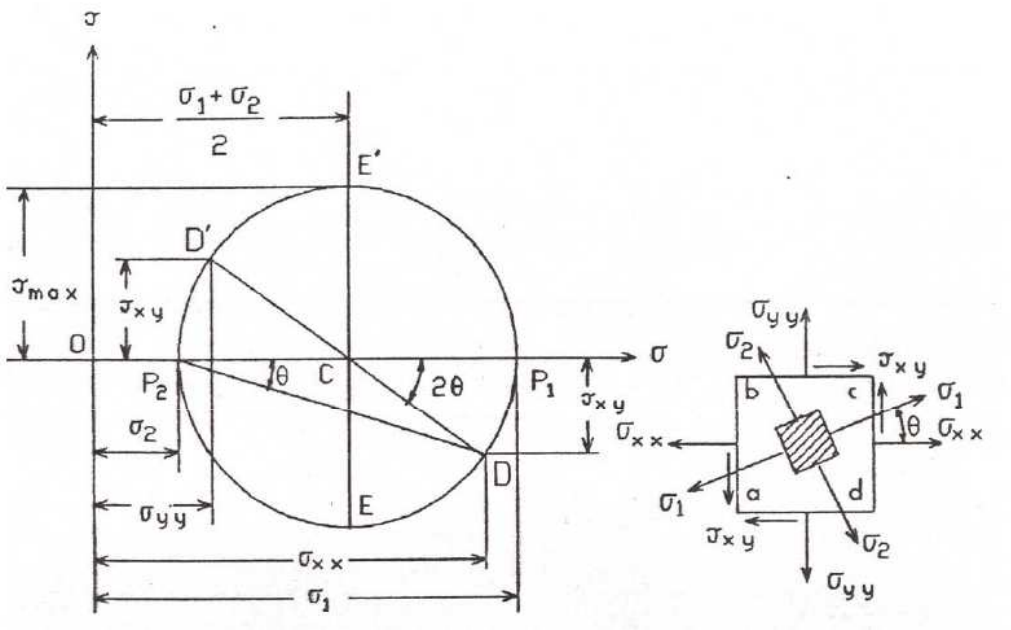
*Estado plano de tensão*




As tensões normais positivas indicam tracção e as tensões de corte são consideradas positivas quando definem um binário que tende a fazer rodar o elemento sobre que actuam no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. É o caso das tensões de corte que actuam nas faces bc e ad do elemento abcd representado na figura.

## Construção de Mohr

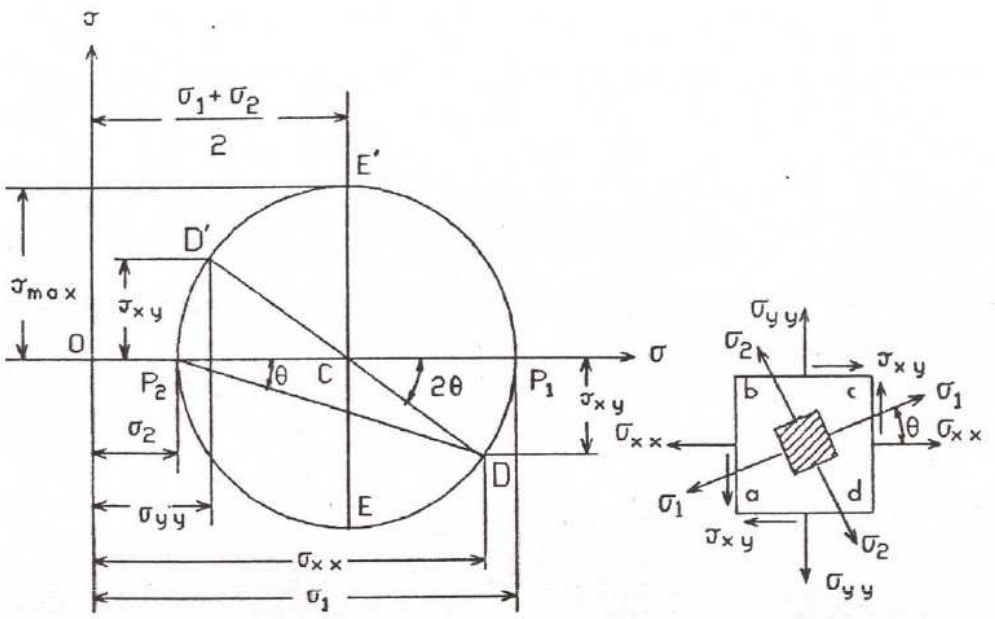
*Estado plano de tensão*




As tensões normais positivas indicam tracção e as tensões de corte são consideradas positivas quando definem um binário que tende a fazer rodar o elemento sobre que actuam no sentido do movimento dos ponteiros do relógio. É o caso das tensões de corte que actuam nas faces bc e ad do elemento abcd representado na figura.

## Construção de Mohr

*Estado plano de tensão*

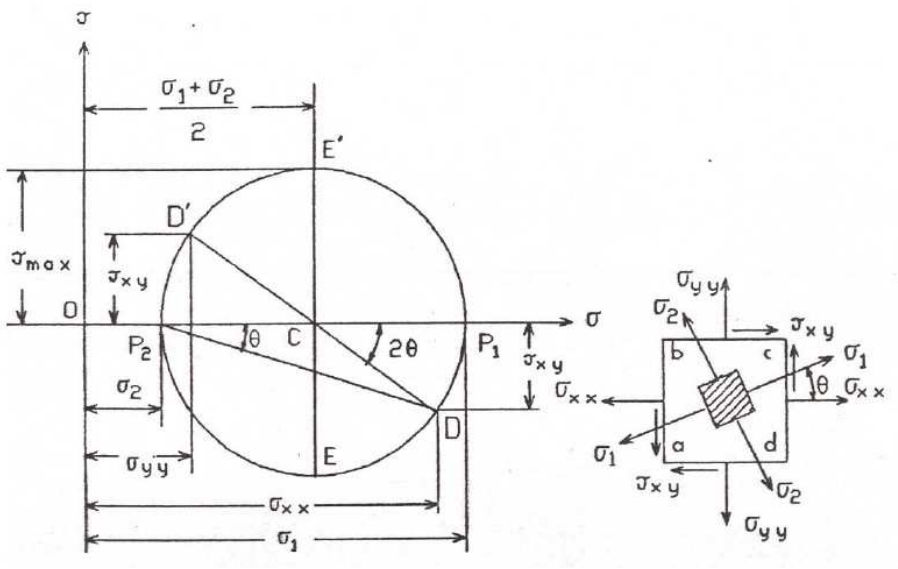



À medida que o ângulo θ varia desde o valor θ=0 até θ =π/2 o ponto D desloca-se de P1 para P2, de tal forma que a parte superior do círculo de Mohr representa as tensões para todos os valores de θ compreendidos entre aqueles dois limites. A metade inferior do círculo de Mohr representa as tensões para valores do ângulo θ compreendidos entre θ =- π /2 e θ =0.

Prolongando o raio CD até ao ponto D', isto é, se se considerar o ângulo π +2θ em vez de 2θ, obtêm-se as tensões que actuam no plano BC perpendicular a AB. Isso mostra que as tensões de corte em dois planos mutuamente perpendiculares são numéricamente iguais.

## Construção de Mohr

*Estado plano de tensão*

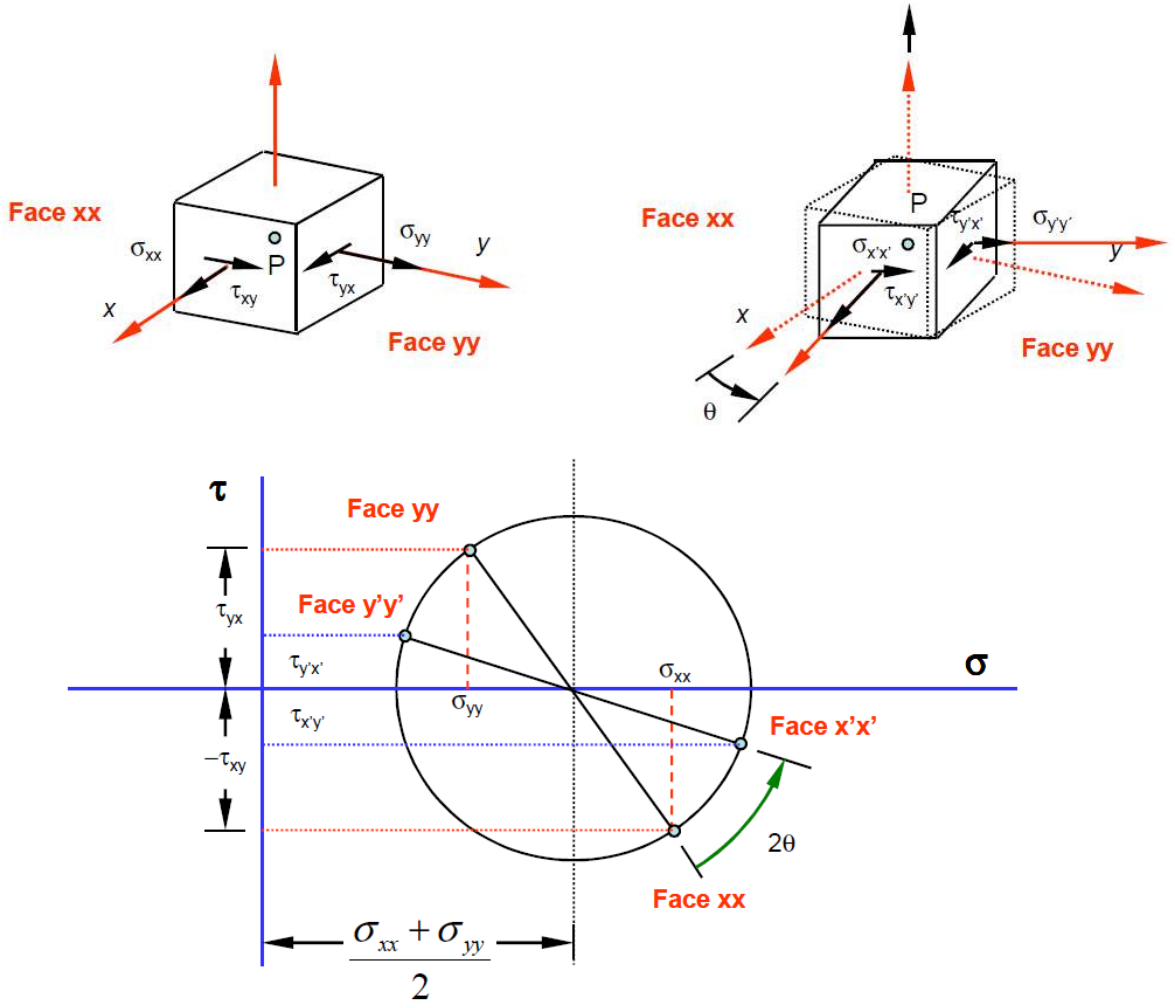



A construção representada na figura pode também ser utilizada para determinar as direcções principais de tensão no ponto considerado, a partir das tensões $\sigma_{xx}$, $\sigma_{yy}$ e $\tau_{xy}$. Com efeito, se forem conhecidas as componentes da tensão relativamente ao sistema de eixos Oxy, ficam perfeitamente identificados os pontos D e D', que definem um diâmetro do círculo de Mohr.

Traçando depois a respectiva circunferência com centro no ponto C, obtêm-se os pontos $P_1$ e $P_2$ sobre o eixo das abcissas, cujas distâncias à origem definem as amplitudes das duas tensões principais. O ângulo $2\theta$, que define a orientação dos eixos principais de tensão, é dado pela inclinação do diâmetro DD' em relação ao eixo das abcissas.

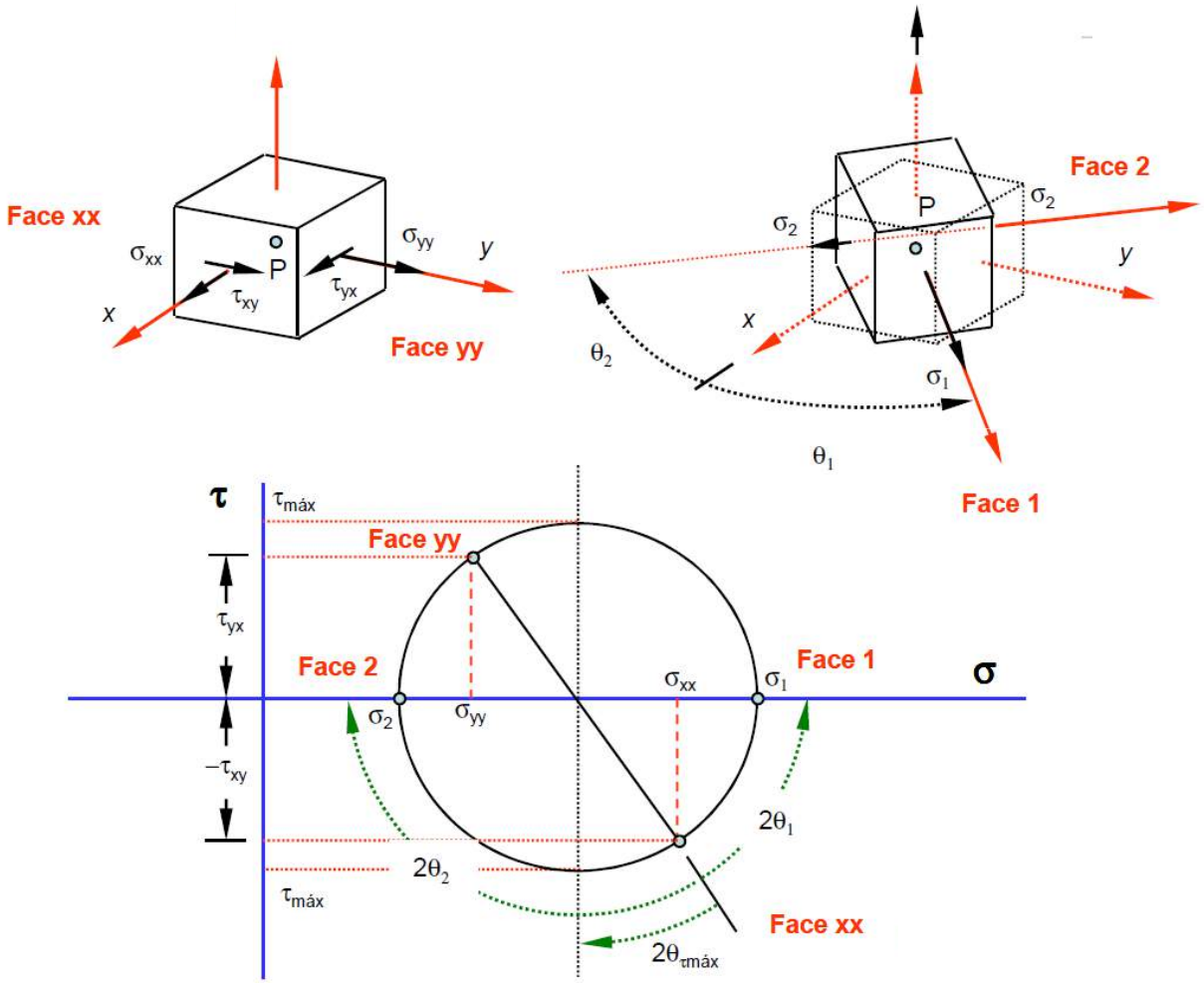
## Construção de Mohr

*Estado plano de tensão*



## Construção de Mohr

*Estado plano de tensão*

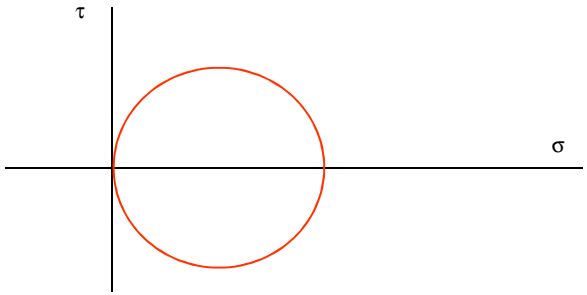


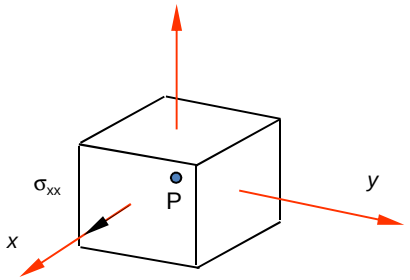
## Construção de Mohr

*Estado plano de tensão*

Tracção uniaxial

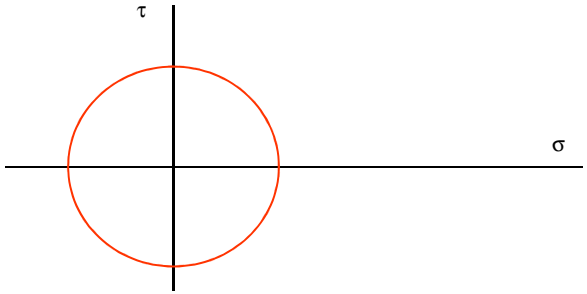
$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$$

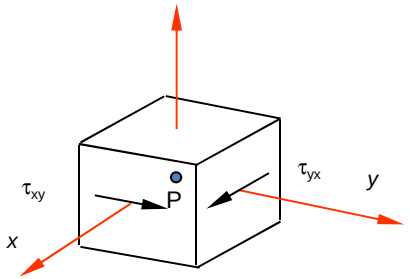



Corte puro

$$[\sigma]=\begin{bmatrix}0 & \tau_{xy}\\ \tau_{yx} & 0\end{bmatrix}$$



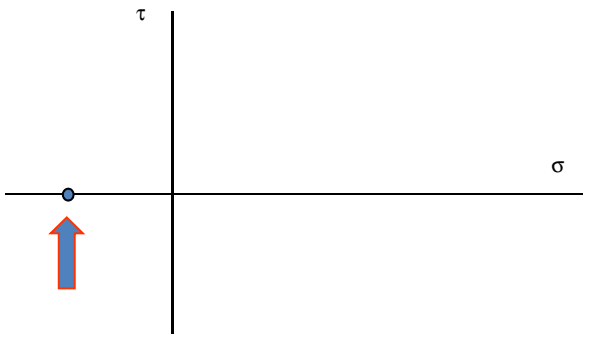



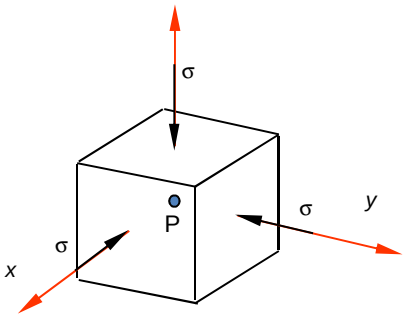
## Construção de Mohr

*Estado plano de tensão*

Estado hidrostático (isotrópico) de tensão

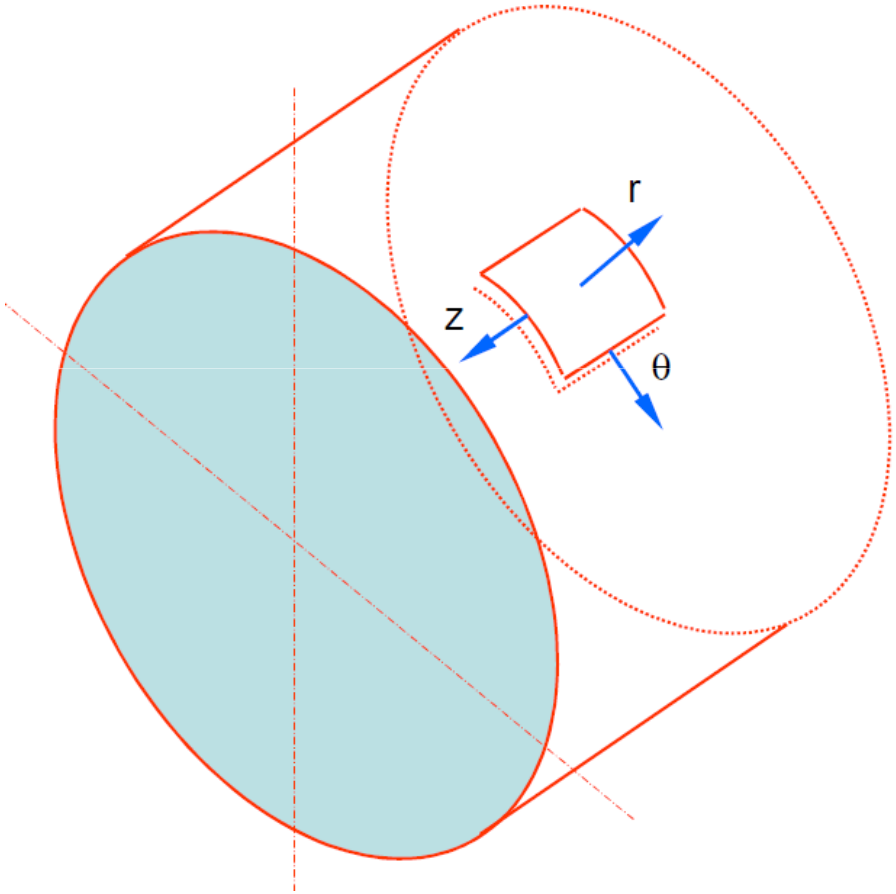
$$[\sigma]=\begin{bmatrix} -\sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{bmatrix}$$

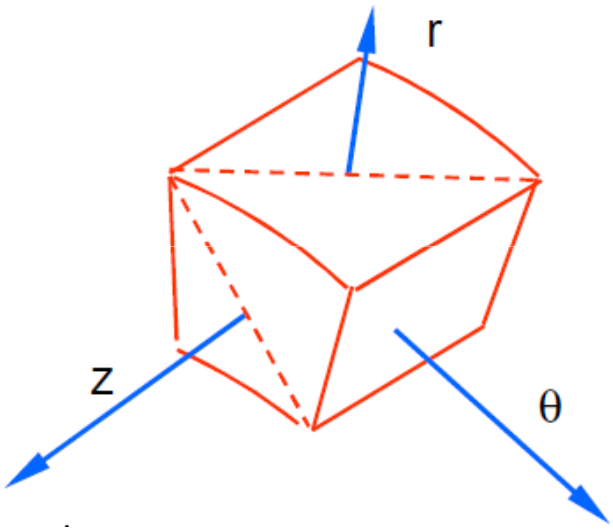


## Estado de tensão em coordenadas cilíndricas

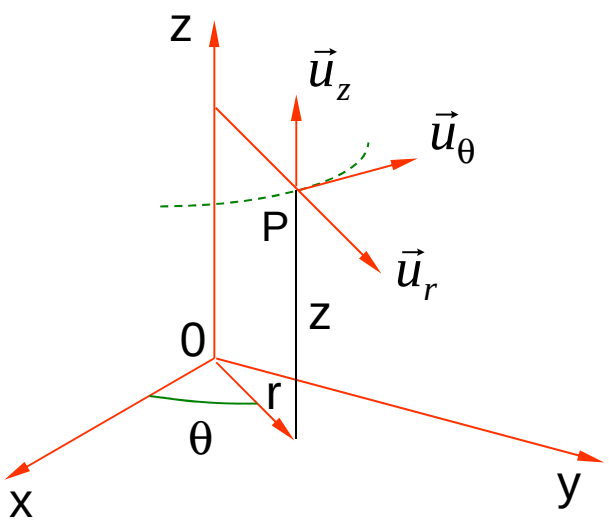
Coordenadas cilíndricas r, θ e z



## Estado de tensão em coordenadas cilíndricas

Coordenadas cilíndricas r, θ e z



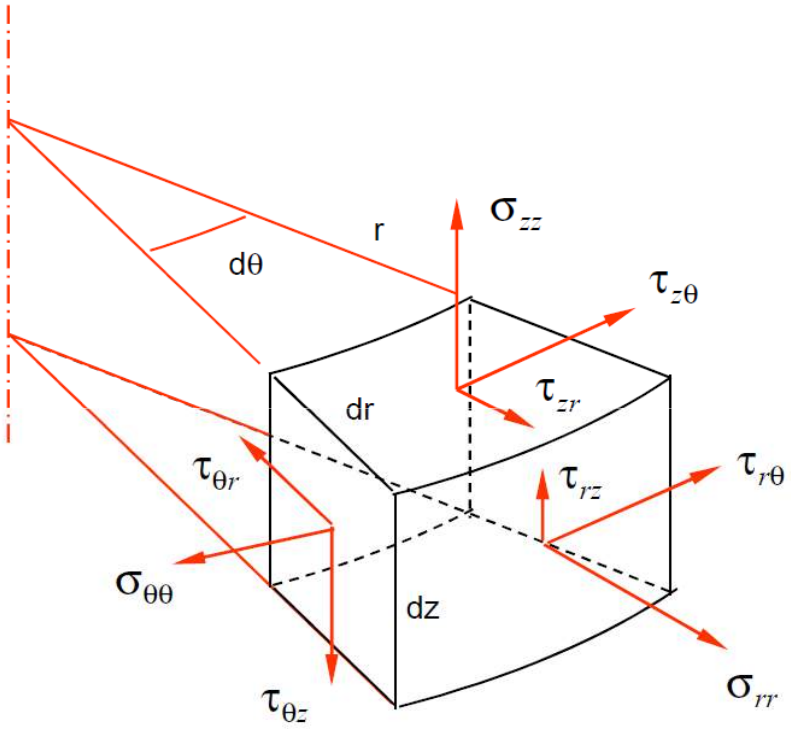

Em cada ponto P considera-se o triedro $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$\vec{u}_r = (\cos\theta, sen\theta, 0)$$
$$\vec{u}_\theta = (-sen\theta, \cos\theta, 0)$$
$$\vec{u}_z = (0, 0, 1)$$

As componentes da tensão são:

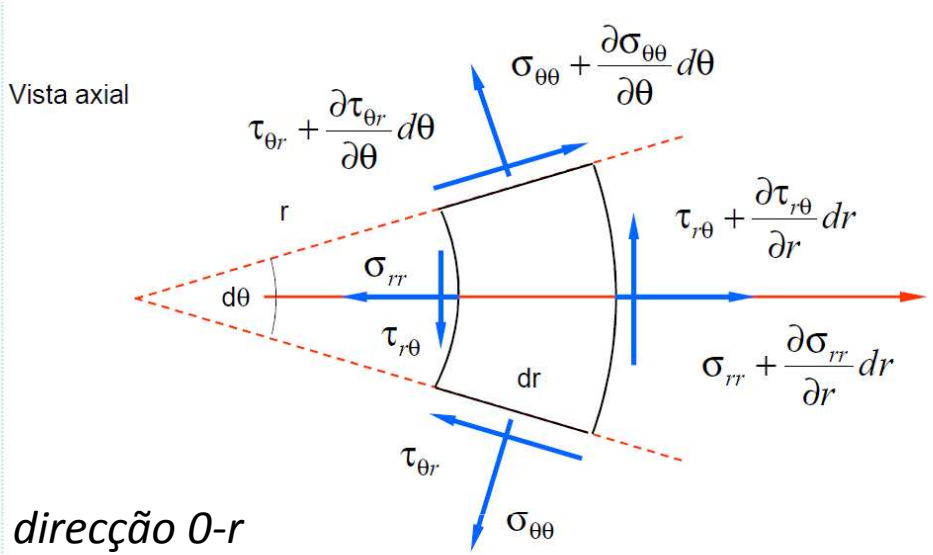
$$\sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r}, \tau_{rz} = \tau_{zr}, \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z}$$

## Estado de tensão em coordenadas cilíndricas




$$[\sigma]=\begin{bmatrix}\sigma_{rr} & \tau_{\theta r} & \tau_{zr}\\ \tau_{r\theta} & \sigma_{\theta\theta} & \tau_{z\theta}\\ \tau_{rz} & \tau_{\theta z} & \sigma_{zz}\end{bmatrix}$$

## Estado de tensão em coordenadas cilíndricas




*Equilíbrio segundo a direcção 0-r*

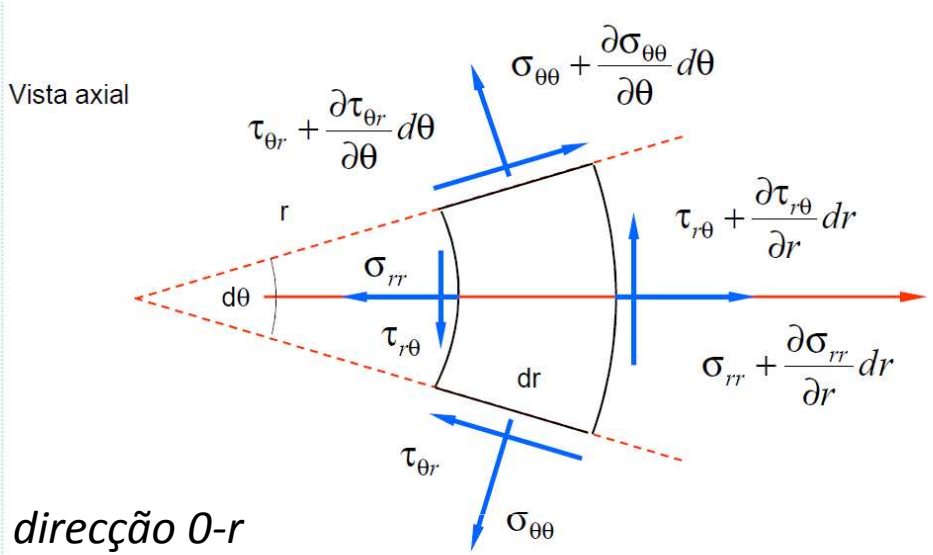
Contribuição de $\sigma_{rr}$

$$\left(\sigma_{rr} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} dr\right)(r + dr)d\theta dz - \sigma_{rr} r d\theta dz$$

Eliminando os termos com termos infinitésimais superiores a 3ª ordem obtém-se

$$\left(\frac{\sigma_{rr}}{r} + \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r}\right) r dr\, d\theta\, dz$$

## Estado de tensão em coordenadas cilíndricas

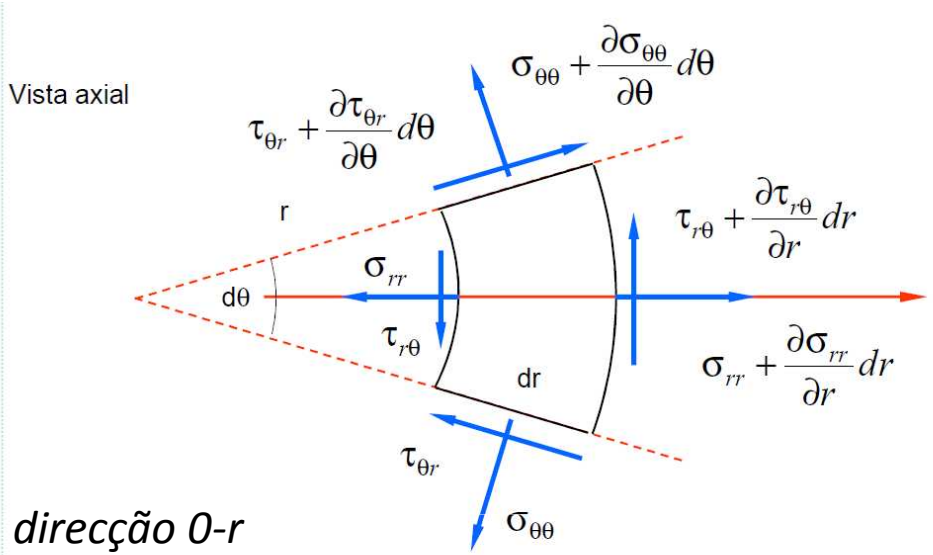



*Equilíbrio segundo a direcção 0-r*

Contribuição de $\sigma_{\theta\theta}$

$$-\left(2\sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} d\theta\right) dr dz sen\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \left(-\frac{\sigma_{\theta\theta}}{r}\right) r dr dz d\theta$$

## Estado de tensão em coordenadas cilíndricas

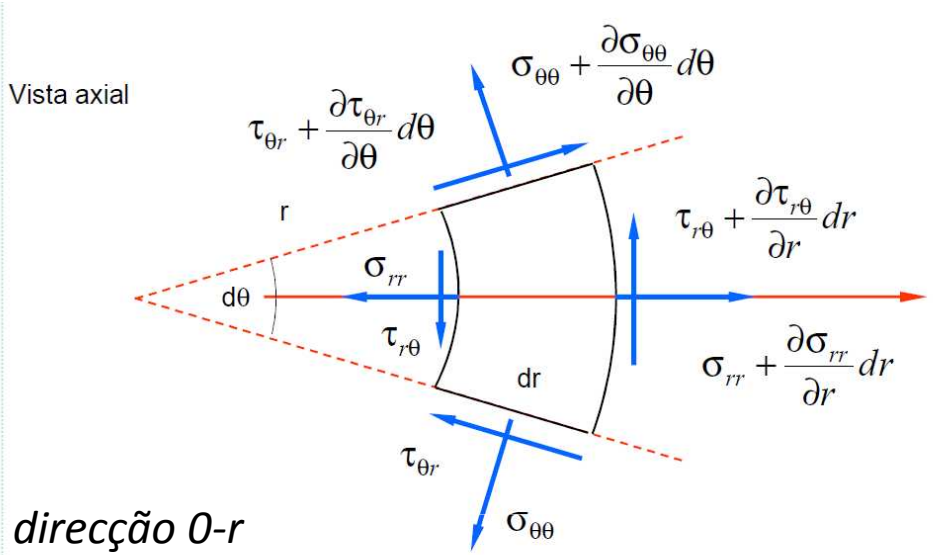



*Equilíbrio segundo a direcção 0-r*

Contribuição de $\tau_{r\theta}$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} d\theta dr dz \cos\left(\frac{d\theta}{2}\right) \approx \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}\right) r dr d\theta dz$$

## Estado de tensão em coordenadas cilíndricas




*Equilíbrio segundo a direcção 0-r*

Contribuição de $\tau_{zr}$

$$\frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} dz\left(rd\theta dr\right) \approx r \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} drdzd\theta$$

Contribuição das forças por unidade de volume:

$$F_r rdrdzd\theta$$

## Estado de tensão em coordenadas cilíndricas

*Equações de equilíbrio :*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \dfrac{2\tau_{r\theta}}{r} + F_\theta = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + F_z = 0 \end{cases}$$

Da lei de reciprocidade das tensões:

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \quad \forall i, j \qquad \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r};\ \tau_{rz} = \tau_{zr};\ \tau_{z\theta} = \tau_{\theta z}$$

## Estado de tensão em coordenadas cilíndricas

No caso de existir simetria axial relativamente ao eixo 0z, não haverá variação do estado de tensão com a coordenada θ. Neste caso, as equações de equlíbrio são dadas por:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \dfrac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} + F_r = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \dfrac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \dfrac{\tau_{rz}}{r} + F_z = 0 \end{cases}$$

*Exercícios*

**1.2.10** O campo das tensões num corpo sólido elástico, homogéneo e isotrópico é definido pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{yy}=120\sqrt{2}\,(z\text{-}y)\,,\quad \tau_{xy}=\tau_{yx}=-100\sqrt{2}\,z \quad \text{e} \quad \tau_{xz}=\tau_{zx}=100\sqrt{2}\,y$$

As restantes componentes do campo das tensões são nulas.

a) Mostre que tal campo de tensões está necessariamente associado a um campo de forças de volume uniforme e parelelo ao eixo dos yy.

b) Determine as tensões principais nos pontos $A\equiv(0,\sqrt{2}/2,\ -\sqrt{2}/2)$ e $B\equiv(0,-\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$, e as respectivas direcções.

c) Desenhe os círculos de Mohr correspondentes ao estado de tensão no ponto $C\equiv(0,\sqrt{2}/2,\ \sqrt{2}/2)$.

d) À volta do ponto B, desenhe um paralelepípedo elementar de faces paralelas aos planos Cartesianos e, sobre cada uma dessas faces, represente as tensões correspondentes.

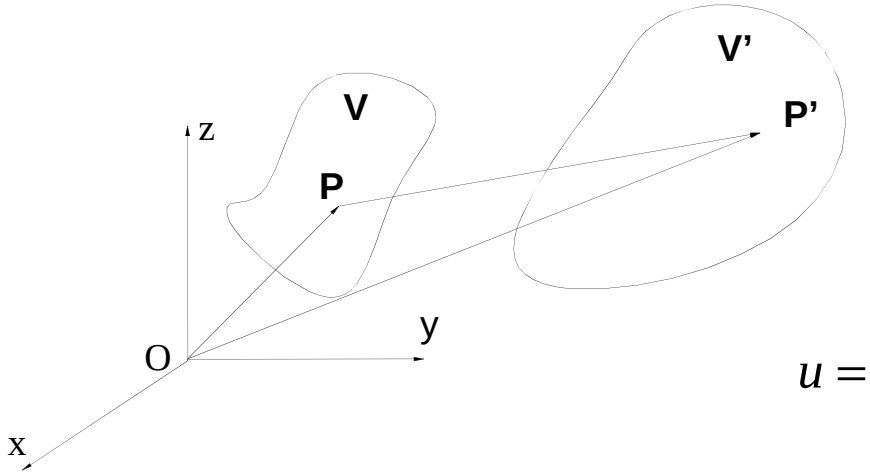
# Aula #6

## Sumário:

- Análise das deformações.
- Deslocamento e deformação linear.
- Distorção ou deformação de corte.
- Componentes Cartesianas da deformação.
- Deformação segundo direcções arbitrárias.
- Leis de transformação das deformações.
- Problemas 2.2.1 e 2.2.2.

## Estado de deformação

*Introdução. Conceito de vector deslocamento e de campo de deslocamentos*




$$\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$$
$$\overrightarrow{OP'} = (x', y', z')$$
$$\overrightarrow{PP'} = \vec{u} = (u, v, w)$$

$$u = x'-x;\ v = y'-y;\ w = z'-z$$

Vector deslocamento de um ponto: $\vec{u} = \overrightarrow{PP'} = (u, v, w)$

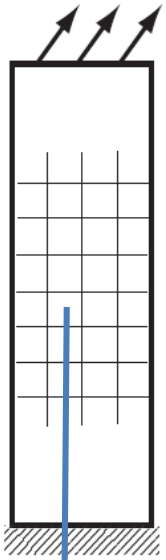
Campo de Deslocamentos:
$$\begin{cases} u = u(x,y,z) \\ v = v(x,y,z) \\ w = w(x,y,z) \end{cases}$$

Assume-se que as funções (u, v, w) têm valores muito pequenos, que variam de uma forma contínua com as coordenadas x, y, z e que as suas derivadas são também quantidades muito pequenas.

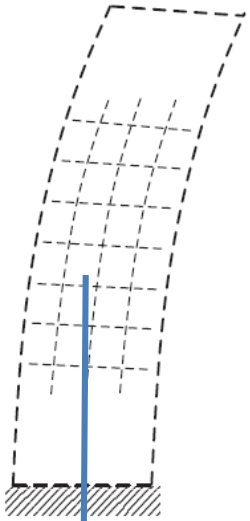
## Estado de deformação

*Introdução.*

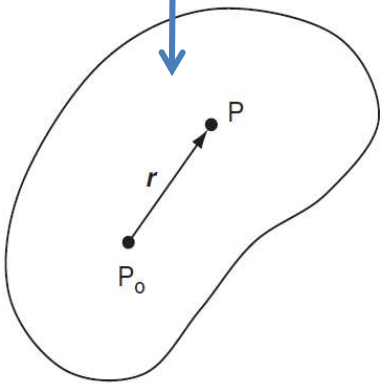
Forma não deformada



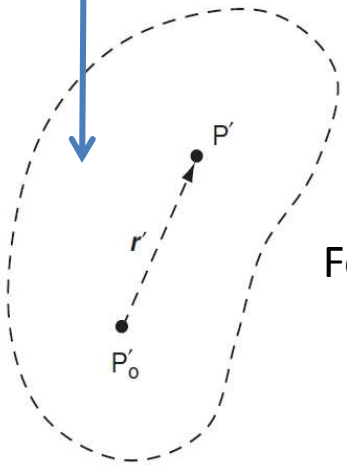
Forma deformada



Forma não deformada



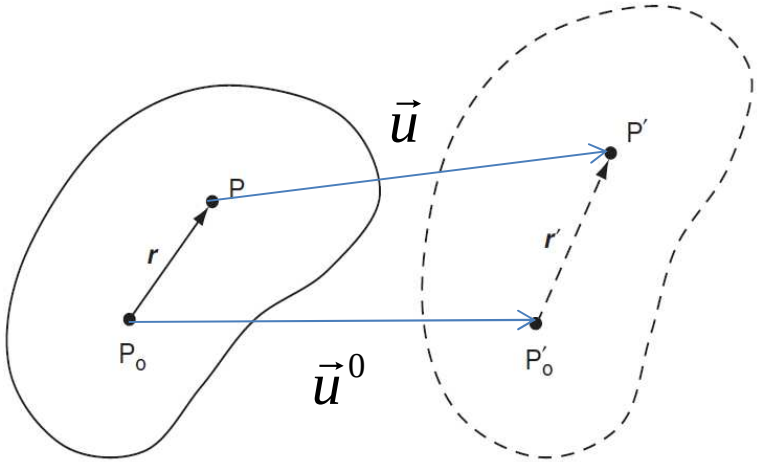

Forma deformada



## Estado de deformação

*Introdução.*

Forma não deformada




Forma deformada

$$u = u^o + \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z$$
$$v = v^o + \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z$$
$$w = w^o + \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z$$

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}' - \vec{r} = \vec{u} - \vec{u}^0 \Rightarrow$$

$$\Delta r_x = \frac{\partial u}{\partial x} r_x + \frac{\partial u}{\partial y} r_y + \frac{\partial u}{\partial z} r_z$$
$$\Delta r_y = \frac{\partial v}{\partial x} r_x + \frac{\partial v}{\partial y} r_y + \frac{\partial v}{\partial z} r_z$$
$$\Delta r_z = \frac{\partial w}{\partial x} r_x + \frac{\partial w}{\partial y} r_y + \frac{\partial w}{\partial z} r_z$$

Em notação indicial: $\Delta r_i = u_{i,j} r_j$

## Estado de deformação

*Introdução.*

$$\Delta r_i = u_{i,j} r_j \qquad u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \Rightarrow$$ Gradiente do campo de deslocamentos

$$u_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{\partial v}{\partial x}\right) & 0 & \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial x}\right) & -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial z}-\frac{\partial w}{\partial y}\right) & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz das deformações — Matriz das rotações

$$[\nabla \vec{u}] = [\varepsilon] + [\omega]$$

## Estado de deformação

*Introdução.*

$$u_{i,j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

Tensor das deformações:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right)$$

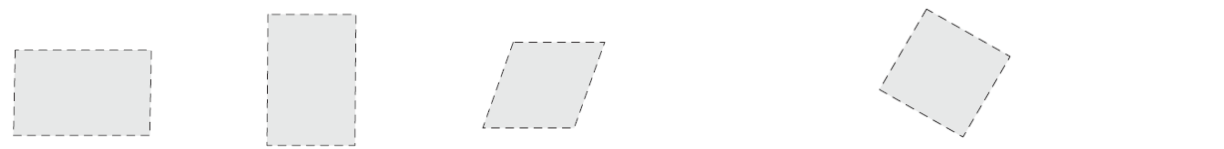
Tensor das rotações:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i})$$

$$u_i = u_i^0 + \varepsilon_{ij} dx_j + \omega_{ij} dx_j$$

Deformação

Rotação de corpo rígido

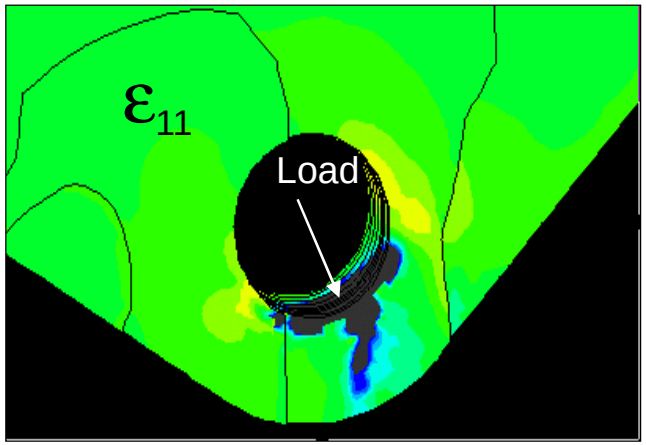


## Estado de deformação

*Notas*

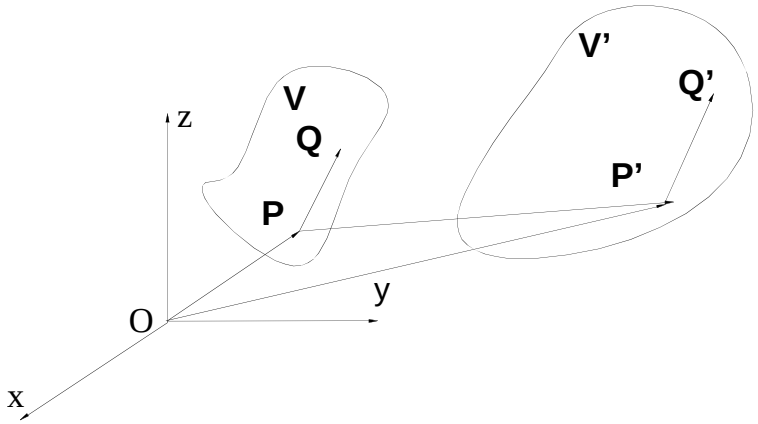
- Unidades: adimensional.
- O estado de deformação de um corpo é representado por um campo tensorial $[\varepsilon(x, y, z)]$.

Exemplo - campo de deformações num estabilizador vertical de um avião:



## Estado de deformação

*Extensão ou deformação linear*




$$\overrightarrow{PQ} = ds \quad ; \quad \overrightarrow{P'Q'} = ds'$$

Deformação linear média ou extensão média do segmento PQ: $\varepsilon_{PQ} = \dfrac{ds'-ds}{ds}$

Deformação linear, ou extensão, em P segundo a direcção PQ definida por **n**={l,m, n}$^T$:

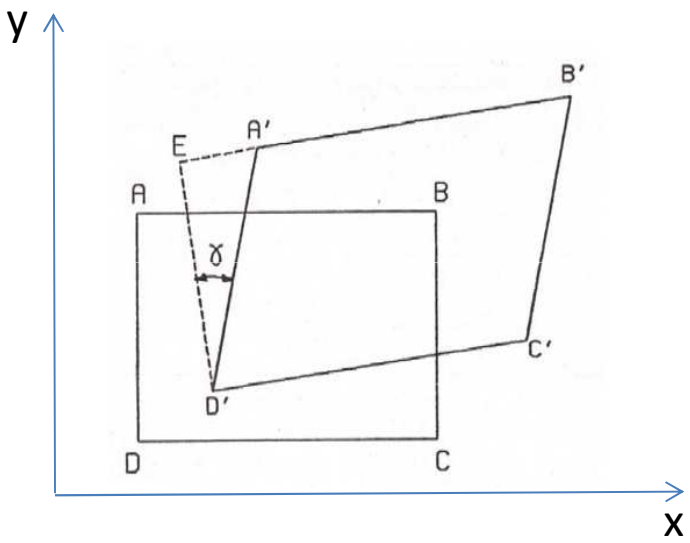
$$\varepsilon(P,\vec{n}) = \lim_{ds\to 0} \frac{ds'-ds}{ds}$$

No casos particulares das direcções coordenadas, têm-se as três componentes cartesianas lineares da deformação em P: $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$ e $\varepsilon_{zz}$

## Estado de deformação

*Distorção ou deformação de corte*

A deformação de corte ou distorção de um elemento rectangular ABCD traduz o escorregamento relativo de planos paralelos uns sobre os outros:



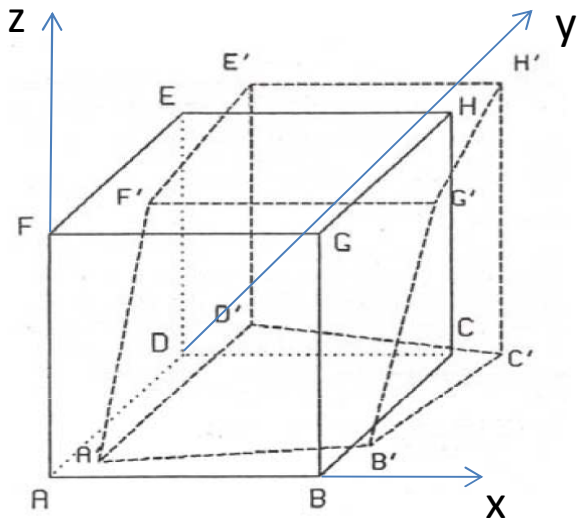

$$Deformação\ de\ Corte = \frac{EA'}{ED'} = tg(\gamma) \cong \gamma$$

Na situação em questão, em que as duas direcções são paralelas a x e y, tem-se:

$$\gamma = \gamma_{xy} = \gamma_{yx}$$

## Estado de deformação

*Distorção ou deformação de corte*

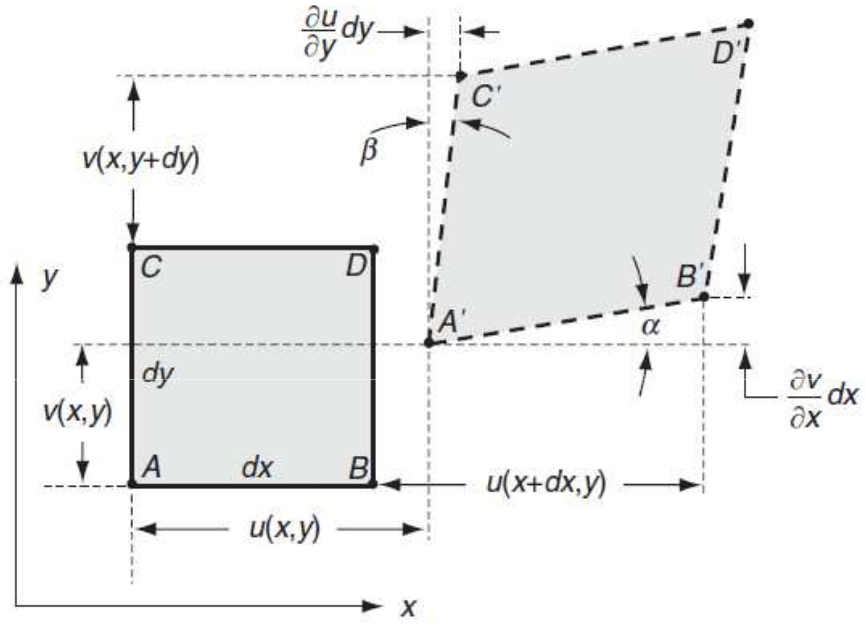



No caso dum elemento tridimensional, a deformação de corte ou deformação angular é traduzida por três componentes, correspondentes às distorções dos três diedros concorrentes no vértice A. Obtêm-se assim as três deformações de corte no ponto considerado:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} \; ; \; \gamma_{yz} = \gamma_{zy} \; ; \; \gamma_{xz} = \gamma_{zx}$$

## Estado de deformação

*Componentes Cartesianas da deformação*




Extensão segundo 0-x:

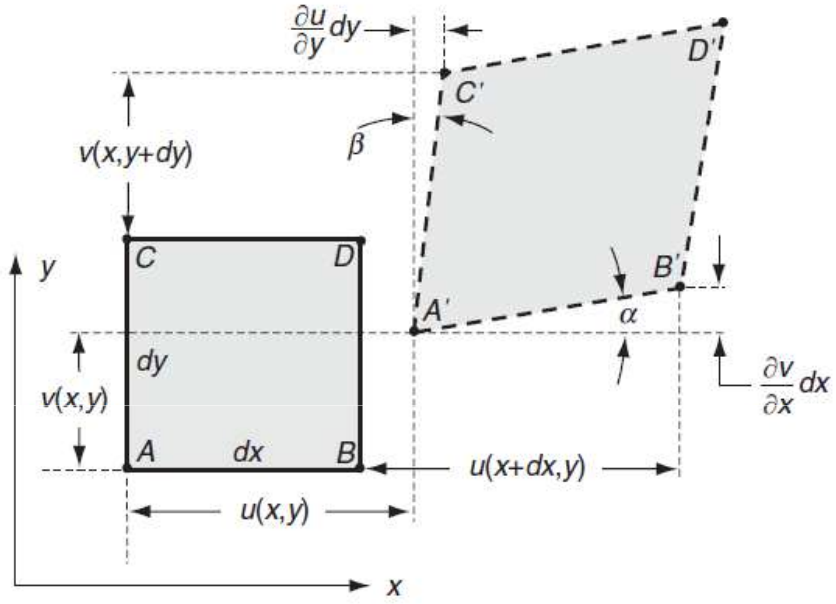
$$\varepsilon_{xx} = \frac{A'B' - AB}{AB}$$

$$A'B' = \sqrt{\left[dx + u(x+dx,y) - u(x,y)\right]^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2} = \sqrt{\left[dx + u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}dx - u(x,y)\right]^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}dx\right)^2}$$

$$= u(x,y) + \frac{\partial u}{\partial x}dx$$

## Estado de deformação

*Componentes Cartesianas da deformação*

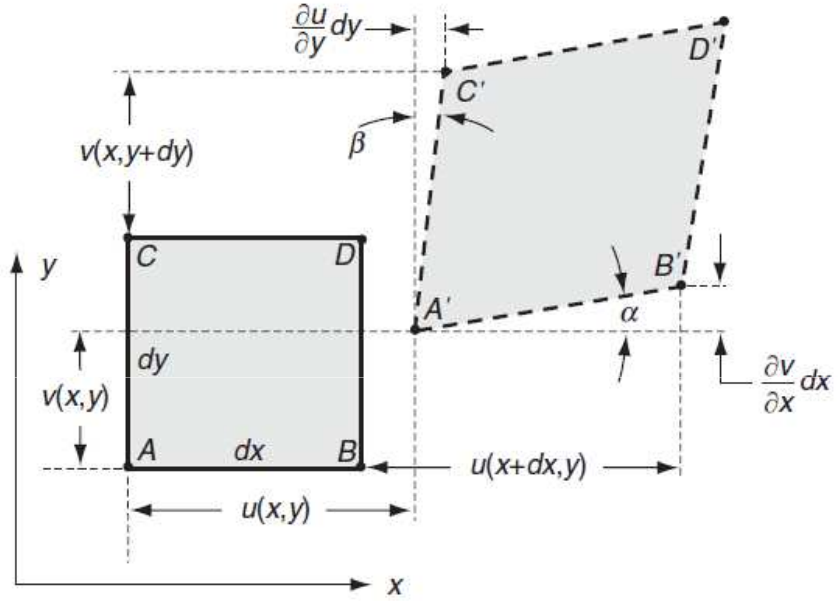



$$A'B' = \sqrt{1 + 2\frac{\partial u}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2}\, dx \approx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{\left(1 + \frac{\partial u}{\partial x}\right) dx - dx}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

## Estado de deformação

*Componentes Cartesianas da deformação*




Distorção no plano x-y:

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta$$

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\frac{\partial v}{\partial x}dx}{dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx} \approx \frac{\partial v}{\partial x} \qquad \beta \approx \tan\beta = \frac{\frac{\partial u}{\partial y}dy}{dy + \frac{\partial v}{\partial y}dy} \approx \frac{\partial u}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$

## Estado de deformação

*Componentes Cartesianas da deformação*

Considerando as três direcções cartesianas Oxyz, obtêm-se as seis componentes da deformação no ponto considerado (três componentes lineares e três componentes de corte):

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \;;\; \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \;;\; \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \;;\; \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \;;\; \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

Deformações de corte de engenharia (*engineering shear strains*)

## Estado de deformação

*Componentes Cartesianas da deformação*

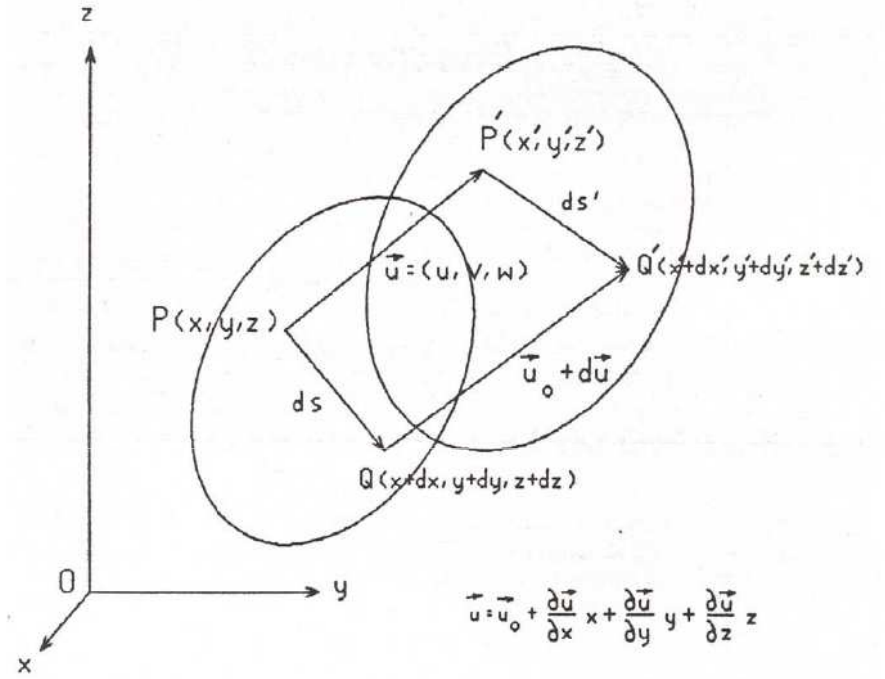
$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(u_{i,j} + u_{j,i}\right) \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \varepsilon_{xy} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right), \varepsilon_{yz} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y}\right), \varepsilon_{zx} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\right) \end{cases}$$

Deformações de corte tensoriais ou componentes Cartesianas da matriz de deformações:

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

## Estado de deformação

*Deformação linear segundo uma direcção arbitrária*




Considere-se um segmento PQ, segundo uma direcção arbitrária **n**={l,m, n}$^T$.

Tomando os comprimentos do segmento PQ, antes e depois da deformação, pode escrever-se:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dz'^2$$

com:

$$x' = x + u(x,y,z)$$
$$y' = y + v(x,y,z)$$
$$z' = z + w(x,y,z)$$

$$\Rightarrow$$

$$dx' = dx + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$$

$$dy' = dy + \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy + \frac{\partial v}{\partial z}dz$$

$$dz' = dz + \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz$$

## Estado de deformação

*Deformação linear segundo uma direcção arbitrária*

Desprezando termos de 2ª ordem nas derivadas dos deslocamentos resulta:

$$ds'^2 = ds^2 + 2\left[\frac{\partial u}{\partial x}dx^2 + \frac{\partial v}{\partial y}dy^2 + \frac{\partial w}{\partial z}dz^2 + (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})dxdy + (\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})dydz + (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})dzdx\right]$$

Da definição de deformação linear:

$$ds' = ds(1+\varepsilon)$$

Os cossenos directores são dados por:

$$l = \frac{dx}{ds}, \qquad m = \frac{dy}{ds}, \qquad n = \frac{dz}{ds}$$

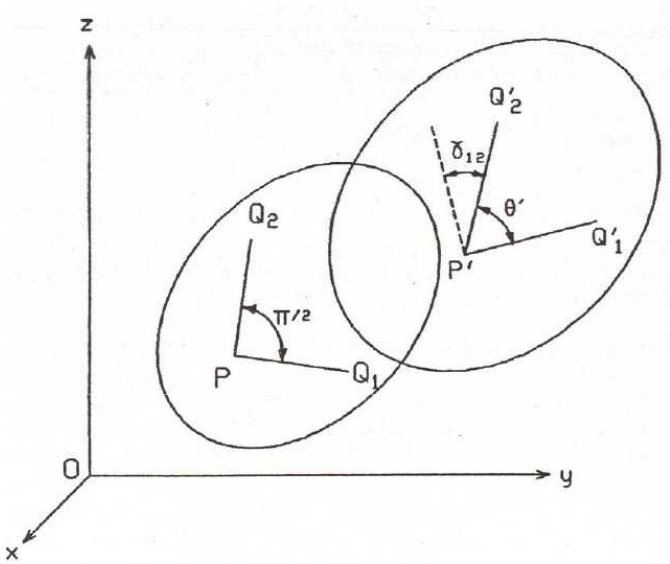
Desprezando os termos de 2ª ordem em ε resulta:

$$\varepsilon(P,\vec{n}) = \frac{\partial u}{\partial x}l^2 + \frac{\partial v}{\partial y}m^2 + \frac{\partial w}{\partial z}n^2 + (\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x})lm + (\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y})mn + (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z})nl$$

$$\varepsilon(P,\vec{n}) = \varepsilon_{xx}l^2 + \varepsilon_{yy}m^2 + \varepsilon_{zz}n^2 + \gamma_{xy}lm + \gamma_{yz}mn + \gamma_{xz}nl \quad \Leftrightarrow \varepsilon(P,\vec{n}) = ([\varepsilon]\{n\})\cdot\{n\}$$

## Estado de deformação

*Deformação de corte segundo duas direcções ortogonais*

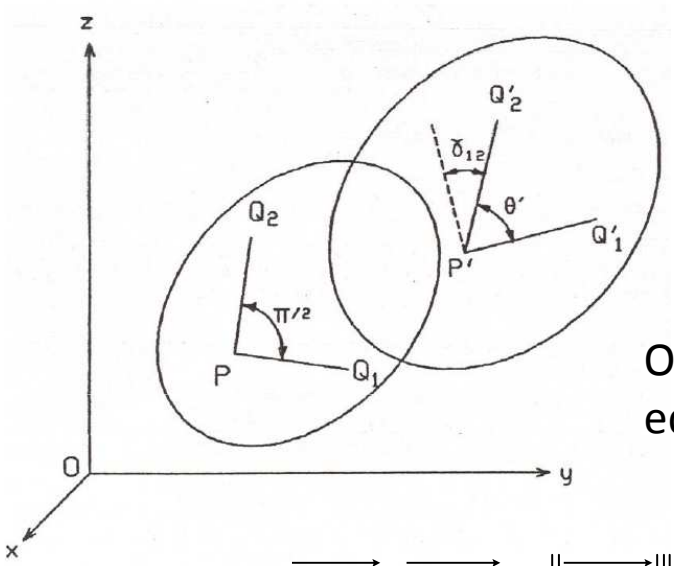



Considerem-se agora dois segmentos de comprimentos infinitesimais, $PQ_1$ e $PQ_2$, segundo duas direcções ortogonais entre si $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$. As componentes Cartesianas daqueles dois segmentos, após a deformação, podem ser calculadas a partir das seguintes equações:

$$\begin{cases} dx_1' = dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx_1 + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy_1 + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz_1 \\ dy_1' = dy_1 + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx_1 + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy_1 + \dfrac{\partial v}{\partial z}dz_1 \\ dz_1' = dz_1 + \dfrac{\partial w}{\partial x}dx_1 + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy_1 + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} dx_2' = dx_2 + \dfrac{\partial u}{\partial x}dx_2 + \dfrac{\partial u}{\partial y}dy_2 + \dfrac{\partial u}{\partial z}dz_2 \\ dy_2' = dy_2 + \dfrac{\partial v}{\partial x}dx_2 + \dfrac{\partial v}{\partial y}dy_2 + \dfrac{\partial v}{\partial z}dz_2 \\ dz_2' = dz_2 + \dfrac{\partial w}{\partial x}dx_2 + \dfrac{\partial w}{\partial y}dy_2 + \dfrac{\partial w}{\partial z}dz_2 \end{cases}$$

## Estado de deformação

*Deformação de corte segundo duas direcções ortogonais*




$$\overrightarrow{P'Q_1'} = \left\{dx_1', dy_1', dz_1'\right\}^T$$

$$\overrightarrow{P'Q_2'} = \left\{dx_2', dy_2', dz_2'\right\}^T$$

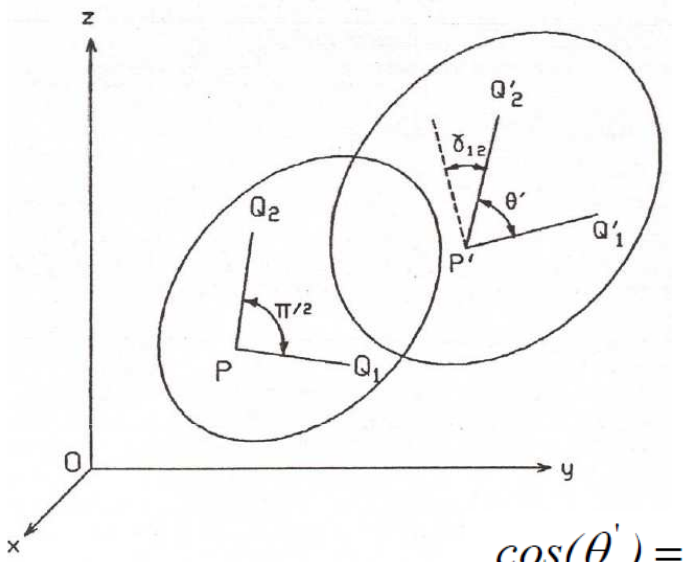
O ângulo θ' pode calcular-se recorrendo à seguinte equação:

$$\overrightarrow{P'Q_1'} \cdot \overrightarrow{P'Q_2'} = \left\|\overrightarrow{P'Q_1'}\right\| \left\|\overrightarrow{P'Q_2'}\right\| \cos\theta' = ds_1(1+\varepsilon_1)ds_2(1+\varepsilon_2)\cos\theta'$$

$$\cos\theta' = \frac{\overrightarrow{P'Q_1'} \cdot \overrightarrow{P'Q_2'}}{ds_1 ds_2 (1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)}$$

## Estado de deformação

*Deformação de corte segundo duas direcções ortogonais*




Desprezando os termos de segunda ordem nas derivadas dos deslocamentos, de acordo com a aproximação linear das deformações infinitesimais, obtém-se:

$$\cos(\theta') = 2(\varepsilon_{xx} l_1 l_2 + \varepsilon_{yy} m_1 m_2 + \varepsilon_{zz} n_1 n_2) + \\ + \gamma_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \gamma_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \gamma_{xz}(l_1 n_2 + l_2 n_1)$$

Considerando: $\cos\theta' = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta'\right) \approx \frac{\pi}{2} - \theta' = \gamma_{n1,n2}$

$$\gamma_{n1,n2} = 2(\varepsilon_{xx} l_1 l_2 + \varepsilon_{yy} m_1 m_2 + \varepsilon_{zz} n_1 n_2) + \\ + \gamma_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \gamma_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \gamma_{xz}(l_1 n_2 + l_2 n_1)$$

## Estado de deformação

*Deformação de corte segundo duas direcções ortogonais*

Em conclusão, pode-se dizer que estado de deformação num ponto fica completamente definido em termos das componentes cartesianas da deformação, na medida em que, uma vez conhecidas essas componentes, é possível calcular as extensões lineares e as distorções para quaisquer outras direcções:

$$\begin{cases} \varepsilon(P,\vec{n}) = \varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} nl \\ \gamma_{n1,n2} = 2(\varepsilon_{xx} l_1 l_2 + \varepsilon_{yy} m_1 m_2 + \varepsilon_{zz} n_1 n_2) + \\ \qquad + \gamma_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \gamma_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \gamma_{xz}(l_1 n_2 + l_2 n_1) \end{cases}$$

## Estado de deformação

*Lei de transformação das deformações*

Considere-se a seguinte matriz de transformação do sistema de eixos 0xyz no distema de eixos 0x'y'z': $[l]=\begin{bmatrix} l_{x'} & m_{x'} & n_{x'} \\ l_{y'} & m_{y'} & n_{y'} \\ l_{z'} & m_{z'} & n_{z'} \end{bmatrix}$

As componentes cartesianas da deformação referidas ao sistema de eixos 0x'y'z', podem ser calculadas em função do estado de deformação no sistema 0xyz, recorrendo às leis de transformação das deformações, que decorrem directamente das expressões anteriormente:

$$\varepsilon_{x'x'} = \varepsilon_{xx} l_{x'}^2 + \varepsilon_{yy} m_{x'}^2 + \varepsilon_{zz} n_{x'}^2 + \gamma_{xy} l_{x'} m_{x'} + \gamma_{yz} m_{x'} n_{x'} + \gamma_{zx} n_{x'} l_{x'}$$

$$\varepsilon_{y'y'} = \varepsilon_{yy} m_{y'}^2 + \varepsilon_{zz} n_{y'}^2 + \varepsilon_{xx} l_{y'}^2 + \gamma_{yz} m_{y'} n_{y'} + \gamma_{zx} n_{y'} l_{y'} + \gamma_{xy} l_{y'} m_{y'}$$

$$\varepsilon_{z'z'} = \varepsilon_{zz} n_{z'}^2 + \varepsilon_{xx} l_{z'}^2 + \varepsilon_{yy} m_{z'}^2 + \gamma_{zx} n_{z'} l_{z'} + \gamma_{xy} l_{z'} m_{z'} + \gamma_{yz} m_{z'} n_{z'}$$

$$\gamma_{x'y'} = 2(\varepsilon_{xx} l_{x'} l_{y'} + \varepsilon_{yy} m_{x'} m_{y'} + \varepsilon_{zz} n_{x'} n_{y'}) + \gamma_{xy}(l_{x'} m_{y'} + m_{x'} l_{y'}) + \gamma_{yz}(m_{x'} n_{y'} + n_{x'} m_{y'}) + \gamma_{zx}(n_{x'} l_{y'} + l_{x'} n_{y'})$$

$$\gamma_{y'z'} = 2(\varepsilon_{yy} m_{y'} m_{z'} + \varepsilon_{zz} n_{y'} n_{z'} + \varepsilon_{xx} l_{y'} l_{z'}) + \gamma_{yz}(m_{y'} n_{z'} + n_{y'} m_{z'}) + \gamma_{zx}(n_{y'} l_{z'} + l_{y'} n_{z'}) + \gamma_{xy}(l_{y'} m_{z'} + m_{y'} l_{z'})$$

$$\gamma_{z'x'} = 2(\varepsilon_{zz} n_{z'} n_{x'} + \varepsilon_{xx} l_{z'} l_{x'} + \varepsilon_{yy} m_{z'} m_{x'}) + \gamma_{zx}(n_{z'} l_{x'} + l_{z'} n_{x'}) + \gamma_{xy}(l_{z'} m_{x'} + m_{z'} l_{x'}) + \gamma_{yz}(m_{z'} n_{x'} + n_{z'} m_{x'})$$

ou: $[\varepsilon'] = [l][\varepsilon][l]^T$

## Estado de deformação

*Lei de transformação das deformações*

Comparando estas equações com as equações homólogas referentes às leis de transformação das tensões, verifica-se que existe uma semelhança notável entre os dois tipos de equações.

Com efeito, se se definir uma correspondência do tipo:

$$\begin{cases} \sigma_{xx} \Leftrightarrow \varepsilon_{xx} \\ \sigma_{yy} \Leftrightarrow \varepsilon_{yy} \\ \sigma_{zz} \Leftrightarrow \varepsilon_{zz} \\ \tau_{xy} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xy} \\ \tau_{yz} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \tau_{xz} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\gamma_{xz} \end{cases}$$

As equações de transformação em ambos os casos são idênticas duas a duas. E este tipo de semelhança é importante, na medida em que daí decorre imediatamente que alguns dos resultados que foram obtidos anteriormente para as tensões podem ser agora transportados directamente para a análise das deformações. É o caso, por exemplo, das deformações principais e das direcções principais de deformação

*Exercícios*

**2.2.1** O campo dos deslocamentos num meio material é definido pelas seguintes componentes:

$$u = 3x^4 + 2\,x^2\,y^2 + x + y + z^3 + 1$$
$$v = 3xy + y^3 + y^2z + z^2 + 1$$
$$w = x^2 + xy + yz + 2zx + y^2 + z^2 + 2$$

a) Determine o campo das deformações que lhe está associado.

b) Determine a deformação linear ε, no ponto P de coordenadas (0, 1, 1), segundo a direcção **n** igualmente inclinada relativamente aos três eixos coordenados, isto é: $\vec{n} = (\sqrt{3}/3\ ,\ \sqrt{3}/3\ ,\ \sqrt{3}/3)$

*Exercícios*

**2.2.2** Transforme as componentes cartesianas de deformação relativamente a um sistema de eixos global O*xyz:*

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= 3 \quad \varepsilon_{yy} = 2 \quad \varepsilon_{zz} = -1 \\ \gamma_{xy} &= 3 \quad \gamma_{yz} = 2 \quad \gamma_{zx} = -1 \end{aligned}$$

para um sistema de eixos cartesianos particular Ox'y'z', cuja orientação em relação ao sistema global é definida pelos seguintes ângulos:

| *ângulo* | *a)* | *b)* | *c)* | *d)* |
|---|---|---|---|---|
| (x-x') | π/4 | π/2 | 0 | π/2 |
| (y-y') | π/4 | π/2 | π/2 | 0 |
| (z-z') | 0 | 0 | π/2 | π/2 |

# Aula #7

## Sumário:

- Deformações principais.
- Invariantes das deformações.
- Deformações principais secundárias.
- Deformação média e deformação desvio.
- Deformações sobre um plano.
- Valores máximos da deformação de corte
- Deformações octaédricas.
- Problema 2.2.5.

## Deformações principais

Em cada ponto existem pelo menos três direcções mutuamente ortogonais definidas pelos versores ($\mathbf{n_1},\mathbf{n_2},\mathbf{n_3}$), para as quais são nulas as deformações de corte, sendo estacionários (máximos ou mínimos) os valores das respectivas deformações lineares. Essas direcções são as direcções principais de deformação, definidas por um sistema de três equações do tipo:

$$\begin{cases} (\varepsilon_{xx}-\varepsilon)l + \frac{1}{2}\gamma_{xy}m + \frac{1}{2}\gamma_{xz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy}l + (\varepsilon_{yy}-\varepsilon)m + \frac{1}{2}\gamma_{yz}n = 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz}l + \frac{1}{2}\gamma_{yz}m + (\varepsilon_{zz}-\varepsilon)n = 0 \end{cases}$$

Onde as deformações principais $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ são as raízes da equação característica do terceiro grau:

$$\varepsilon^3 - (\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{zz})\varepsilon^2 + (\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{zz}\varepsilon_{xx} - \tfrac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \tfrac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \tfrac{1}{4}\gamma_{zx}^2)\varepsilon$$
$$-[\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}(\tfrac{1}{4}\gamma_{yz}^2) - \varepsilon_{yy}(\tfrac{1}{4}\gamma_{zx}^2) - \varepsilon_{zz}(\tfrac{1}{4}\gamma_{xy}^2) + \tfrac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx}] = 0$$

## Deformações principais

Relativamente ao triedro ortonormal das três direcções principais de deformação ($\mathbf{n_1}$, $\mathbf{n_2}$, $\mathbf{n_3}$) as equações que exprimem a extensão linear segundo uma direcção arbitrária $\mathbf{n}=\{l,m,n\}^T$ e a deformação de corte segundo duas direcções ortogonais $\mathbf{n}=\{l,m,n\}^T$ e $\mathbf{n'}=\{l',m',n'\}^T$ são dadas pelas seguintes expressões:

$$\varepsilon(P,\vec{n}) = \varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} nl$$

$\gamma_{xy}$: =0, $\gamma_{yz}$: =0, $\gamma_{xz}$: =0

$$\boxed{\varepsilon_n = l^2\varepsilon_1 + m^2\varepsilon_2 + n^2\varepsilon_3}$$

$$\gamma_{n1,n2} = 2(\varepsilon_{xx} l_1 l_2 + \varepsilon_{yy} m_1 m_2 + \varepsilon_{zz} n_1 n_2) + \\ + \gamma_{xy}(l_1 m_2 + l_2 m_1) + \gamma_{yz}(m_1 n_2 + m_2 n_1) + \gamma_{xz}(l_1 n_2 + l_2 n_1)$$

$\gamma_{xy}$: =0, $\gamma_{yz}$: =0, $\gamma_{xz}$: =0

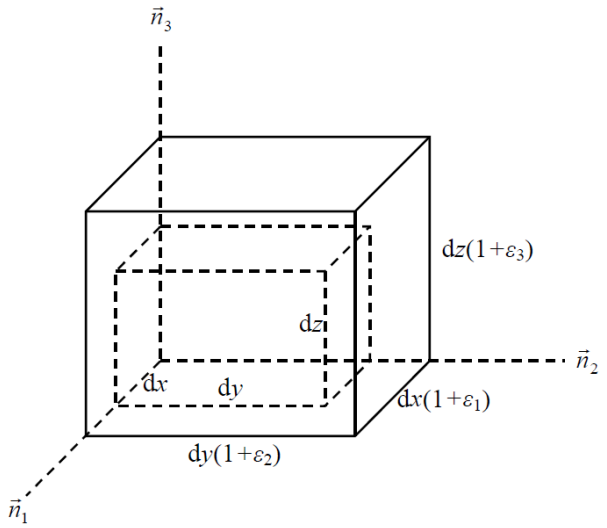
$$\boxed{\gamma_{nt} = 2(ll'\varepsilon_1 + mm'\varepsilon_2 + nn'\varepsilon_3)}$$

## Invariantes das deformações

Invocando a analogia existente entre o tensor das deformações e o tensor das tensões, podemos referir a existência dos seguintes três invariantes das deformações:

$$J_1 = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$
$$J_2 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz} - \tfrac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \tfrac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \tfrac{1}{4}\gamma_{xz}^2 = \varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \varepsilon_3\varepsilon_1$$
$$J_3 = \varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}(\tfrac{1}{4}\gamma_{yz}^2) - \varepsilon_{yy}(\tfrac{1}{4}\gamma_{xz}^2) - \varepsilon_{zz}(\tfrac{1}{4}\gamma_{xy}^2) + \tfrac{1}{4}(\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{xz}) = \varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3$$

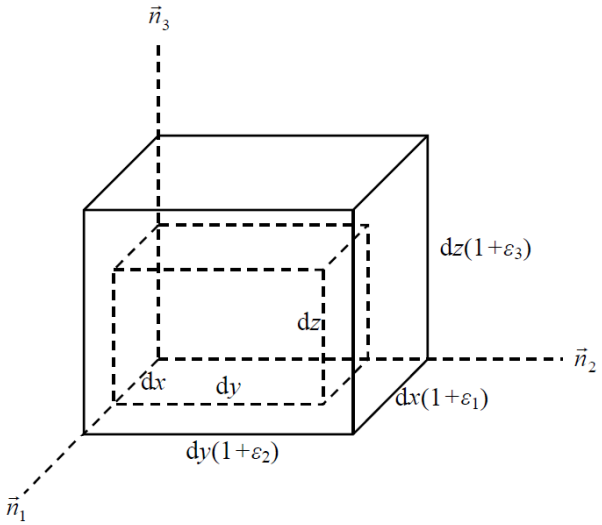
O primeiro invariante , $J_1$, também chamado Invariante Principal ou Invariante Linear, tem um significado físico importante:




O volume do paralelipípedo, antes e depois da deformação, é dado pelas seguintes expressões:

$$dV = dx.dy.dz$$
$$dV' = dx(1+\varepsilon_1).dy(1+\varepsilon_2).dz(1+\varepsilon_3)$$

## Invariantes das deformações




A variação de volume por unidade de volume (coeficiente de deformação volumétrica) é dado pela seguinte expressão:

$$\theta = \frac{dV' - dV}{dV} = (1+\varepsilon_1).(1+\varepsilon_2).(1+\varepsilon_3) - 1$$

ou seja, desprezando quantidades infinitamente pequenas de ordens superiores à primeira:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = J_1$$

## Deformações principais secundárias

A noção de deformação principal secundária num plano define-se de forma idêntica ao que foi feito para as tensões. Considerando uma rotação θ do triedro Oxyz em torno do eixo dos zz, obtêm-se as seguintes equações de transformação para as deformações:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{x'x'} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} sen2\theta \\
\varepsilon_{y'y'} &= \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}) - \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})\cos 2\theta - \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} sen2\theta \\
\gamma_{x'y'} &= -(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}) sen2\theta + \gamma_{xy}\cos 2\theta
\end{aligned}$$

A deformação de corte $\gamma_{x'y'}$ anula-se para um ângulo $\theta_p$ dado por: $tg2\theta_p = \dfrac{\gamma_{xy}}{(\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy})}$

As soluções desta equação definem duas direcções mutuamente perpendiculares, que são as direcções principais secundárias de deformação, $\mathbf{n_1'}$ e $\mathbf{n_2'}$ no plano xy. As deformações principais secundárias vêm então:

$$\begin{cases}
\varepsilon_1' = \dfrac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\dfrac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2} \\
\varepsilon_2' = \dfrac{\varepsilon_{xx}+\varepsilon_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\dfrac{\varepsilon_{xx}-\varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{\gamma_{xy}}{2}\right)^2}
\end{cases}$$

Valores máximo ($\varepsilon_1'$) e mínimo ($\varepsilon_2'$) das extensões no plano xy.

## Deformação média e deformação de desvio

Define-se deformação média num dado ponto como a quantidade $\varepsilon_m$, calculada através da relação:

$$\varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}) = \frac{1}{3}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3) = \frac{1}{3}J_1$$

As deformações desvio, $\varepsilon'_{xx}, \varepsilon'_{yy}, \varepsilon'_{zz}$, são dadas por:

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{xx} &= \varepsilon_{xx} - \varepsilon_m &&= \tfrac{1}{3}(2\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}) \\
\varepsilon'_{yy} &= \varepsilon_{yy} - \varepsilon_m &&= \tfrac{1}{3}(2\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx}) \\
\varepsilon'_{zz} &= \varepsilon_{zz} - \varepsilon_m &&= \tfrac{1}{3}(2\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})
\end{aligned}$$

Qualquer que seja o estado de deformação num ponto material P pode sempre escrever-se:

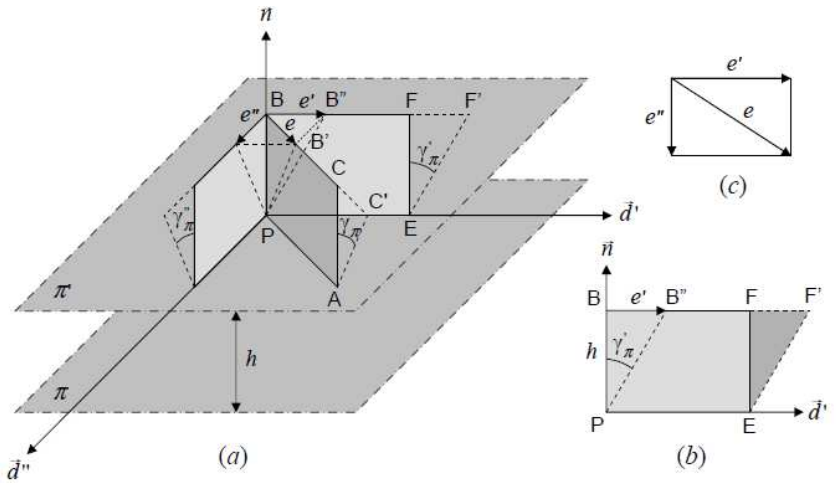
$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_m & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_m & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \frac{1}{2}\gamma_{zx} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} - \varepsilon_m & \frac{1}{2}\gamma_{zy} \\ \frac{1}{2}\gamma_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \varepsilon_{zz} - \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

## Deformação média e deformação de desvio

$$[\varepsilon] = [\varepsilon_m] + [\varepsilon_d]$$

Onde $[\varepsilon_m]$ representa um estado de deformação isotrópico com deformação $\varepsilon_m$ e distorsão nula, e $[\varepsilon_d]$ é a matriz das deformações de desvio, ou matriz das distorções, representando um estado de distorção pura, sem variação de volume ($J_1$=0).

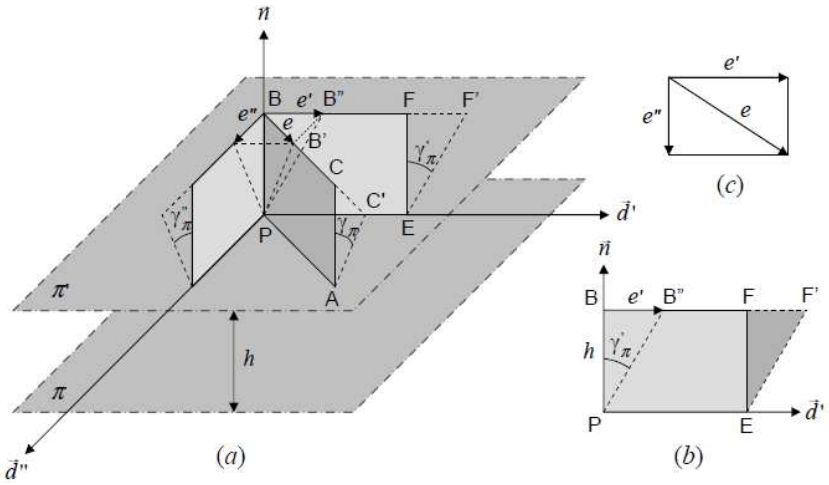
## Deformações sobre um plano




Deformação ou extensão linear sobre um plano π é a deformação linear $\varepsilon_\pi$ segundo a direcção da respectiva normal **n**={l,m,n}$^T$, isto é:

$$\varepsilon_\pi = \varepsilon_{xx} l^2 + \varepsilon_{yy} m^2 + \varepsilon_{zz} n^2 + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} ln + \gamma_{xy} lm$$

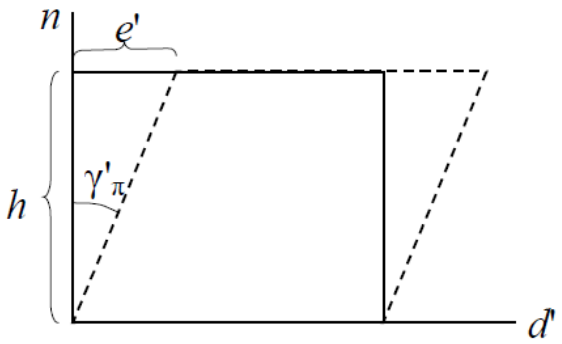
## Deformações sobre um plano



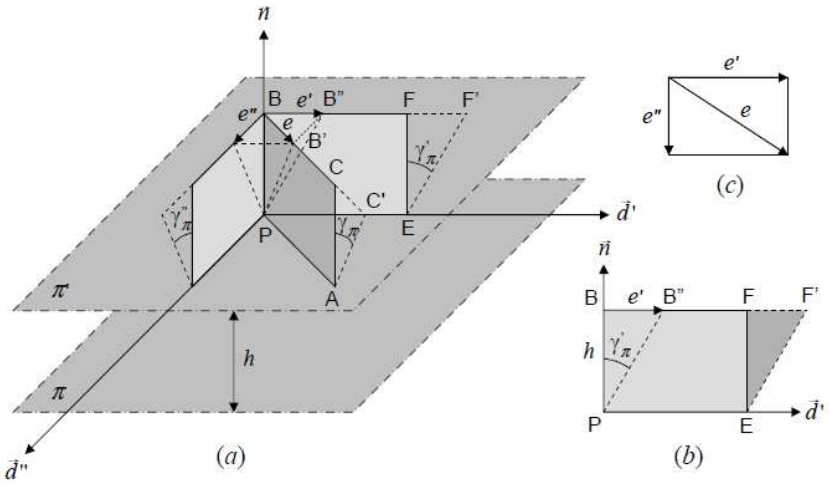

Considere-se agora uma direcção qualquer **d'**={l',m',n'}$^T$ sobre o plano π. Define-se deformação angular, deformação de corte ou distorção sobre o plano π segundo a direcção **d'** à deformação angular $\gamma_\pi'$ entre a normal **n** e a direcção **d'**, isto é:

$$\gamma_\pi' = \gamma_{nd'} = 2\varepsilon_{xx}ll' + 2\varepsilon_{yy}mm' + 2\varepsilon_{zz}nn' + \gamma_{yz}(mn' + nm') + \gamma_{xz}(ln' + nl') + \gamma_{xy}(lm' + ml')$$

A deformação $\gamma_\pi'$ traduz o escorregamento relativo dos planos paralelos a *π*, uns sobre os outros, segundo a direcção **d'**: $e' = h\gamma_\pi'$



## Deformações sobre um plano




Para uma segunda direcção **d"**= {l",m",n“}T também sobre o plano π e perpendicular a **d‘**:

$$\gamma_{\pi}^{"} = 2\varepsilon_{xx} ll" + 2\varepsilon_{yy} mm" + 2\varepsilon_{zz} nn" + \gamma_{xy}(lm" + ml") + \gamma_{yz}(mn" + nm") + \gamma_{xz}(ln" + nl")$$

O escorregamento relativo e" de π' sobre π, na direcção **d"** é: $e" = h\gamma_{\pi}^{"}$

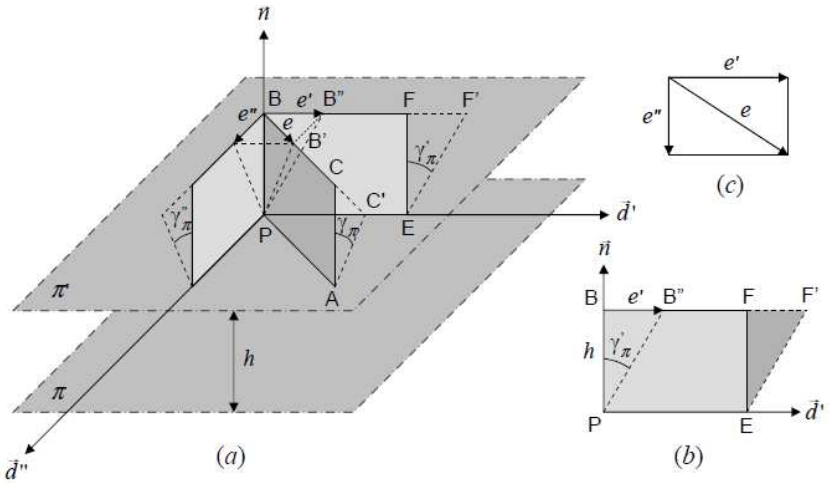
O escorregamento relativo total (*e*) entre os dois planos π e π ' é dado por: $e^2 = e'^2 + e"^2$

A este valor corresponde a deformação de corte ou distorção resultante $\gamma_\pi$ sobre o plano π dada por:

$$\gamma_{\pi} = \frac{e}{h}$$

Esta deformação de corte é responsável pela transformação do rectângulo ABCD no paralelogramo A’B’C’D’.

## Deformações sobre um plano




Combinando as expressões anteriores:

$$\gamma_\pi^2 = \gamma'^2_\pi + \gamma''^2_\pi$$

Substituindo as expressões para $\gamma'^2_\pi$ e $\gamma''^2_\pi$ e atendendo às condições de ortogonalidade entre as direcções **n**, **d'** e **d"**, obtém-se a seguinte expressão final para a deformação de corte ou distorção resultante sobre o plano π:

$$(\tfrac{1}{2}\gamma_\pi)^2 = (D_x^2 + D_y^2 + D_z^2) - \varepsilon_\pi^2$$

$$\begin{cases} D_x = \varepsilon_{xx} l + \frac{1}{2}\gamma_{xy} m + \frac{1}{2}\gamma_{xz} n \\ D_y = \frac{1}{2}\gamma_{xy} l + \varepsilon_{yy} m + \frac{1}{2}\gamma_{yz} n \\ D_z = \frac{1}{2}\gamma_{xz} l + \frac{1}{2}\gamma_{yz} m + \varepsilon_{zz} n \end{cases} \Leftrightarrow \{D\} = [\varepsilon]\{n\}$$

## Deformações sobre um plano

$$\frac{1}{2}\gamma_\pi \Leftrightarrow \tau$$

$$\varepsilon_\pi \Leftrightarrow \sigma$$

$$\begin{bmatrix} D_x \\ D_y \\ D_z \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} T_x \\ T_y \\ T_z \end{bmatrix}$$

A direcção segundo a qual actua a deformação de corte $\gamma_\pi$, isto é, a direcção segundo a qual se processa o escorregamento dos planos paralelos a π uns sobre os outros, é determinada por expressões semelhantes às das tensões:

$$\begin{cases} l_c = \dfrac{(\varepsilon_{xx} l + \frac{1}{2}\gamma_{xy} m + \frac{1}{2}\gamma_{xz} n) - \varepsilon_\pi l}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} = \dfrac{D_x - \varepsilon_\pi l}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} \\ m_c = \dfrac{(\varepsilon_{yy} m + \frac{1}{2}\gamma_{yz} n + \frac{1}{2}\gamma_{xy} l) - \varepsilon_\pi m}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} = \dfrac{D_y - \varepsilon_\pi m}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} \\ n_c = \dfrac{(\varepsilon_{zz} n + \frac{1}{2}\gamma_{xz} l + \frac{1}{2}\gamma_{yz} n) - \varepsilon_\pi n}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} = \dfrac{D_z - \varepsilon_\pi n}{\frac{1}{2}\gamma_\pi} \end{cases}$$

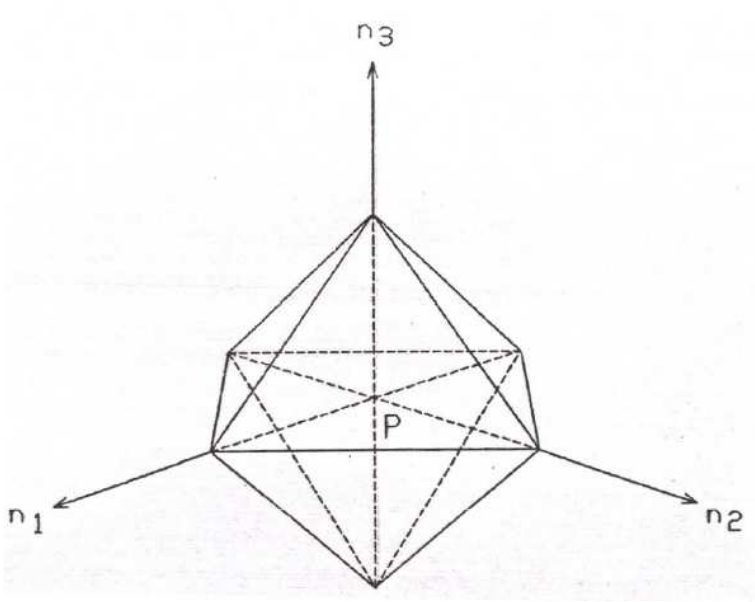
## Valores máximos das deformações de corte

Os resultados que foram encontrados para as tensões, relativamente aos valores máximos e mínimos de $\tau$, podem agora ser generalizados para as deformações, tendo em conta a correspondência atrás referida entre as tensões e as deformações:

| | $l$ | $m$ | $n$ | $\varepsilon_\pi$ | $\gamma_\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| Mínimos de $\gamma_\pi$ | 0 | 0 | $\pm 1$ | $\varepsilon_3$ | 0 |
| | 0 | $\pm 1$ | 0 | $\varepsilon_2$ | 0 |
| | $\pm 1$ | 0 | 0 | $\varepsilon_1$ | 0 |
| Máximos de $\gamma_\pi$ | 0 | $\pm\sqrt{2}/2$ | $\pm\sqrt{2}/2$ | $(\varepsilon_2+\varepsilon_3)$ | $(\varepsilon_2-\varepsilon_3)$ |
| | $\pm\sqrt{2}/2$ | 0 | $\pm\sqrt{2}/2$ | $(\varepsilon_1+\varepsilon_3)$ | $(\varepsilon_1-\varepsilon_3)$ |
| | $\pm\sqrt{2}/2$ | $\pm\sqrt{2}/2$ | 0 | $(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$ | $(\varepsilon_1-\varepsilon_2)$ |

$$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3 \Rightarrow \gamma_{\pi(\max)} = \varepsilon_1 - \varepsilon_3 \Rightarrow \vec{n} = (\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$$

## Deformações octaédricas




Sobre os planos octaédricos a deformação linear octaédrica é:

$$\varepsilon_{oct} = \frac{1}{3}\varepsilon_1 + \frac{1}{3}\varepsilon_2 + \frac{1}{3}\varepsilon_3 = \varepsilon_m$$

A deformação de corte sobre cada um dos planos octaédricos é a chamada deformação de corte ou distorção octaédrica, sendo dada pela expressão seguinte:

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2}$$

ou, em termos das componentes cartesianas da deformação relativamente a um sistema de eixos arbitrário Oxyz:

$$\gamma_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})^2 + (\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz})^2 + (\varepsilon_{zz} - \varepsilon_{xx})^2 + \frac{3}{2}\gamma_{xy}^2 + \frac{3}{2}\gamma_{yz}^2 + \frac{3}{2}\gamma_{zx}^2}$$

*Exercícios*

**2.2.5** O estado de deformação num ponto P dum corpo material é definido pelas seguintes componentes cartesianas

$$\begin{array}{lll} \varepsilon_{xx} = -150\times10^{-6} & \varepsilon_{yy} = -150\times10^{-6} & \varepsilon_{zz} = -300\times10^{-6} \\ \gamma_{xy} = 100\times10^{-6} & \gamma_{yz} = 0 & \gamma_{zx} = 0 \end{array}$$

a) Determine as deformações principais e as respectivas direcções principais no ponto considerado.

b) Determine as componentes normal e de corte da deformação sobre um plano π cuja normal está igualmente inclinada sobre os três eixos coordenados.

c) Identifique os planos octaédricos no ponto considerado e, sobre eles, determine as respectivas deformações normal e de corte.

# Aula #8

## Sumário:

- Equações de compatibilidade.
- Estado plano de deformação.
- Círculo de Mohr para o estado plano de deformação.
- Análise de rosetas.
- Relação entre o campo de deslocamentos e o campo de deformações em coordenadas cilíndricas.
- Problema 2.2.8.

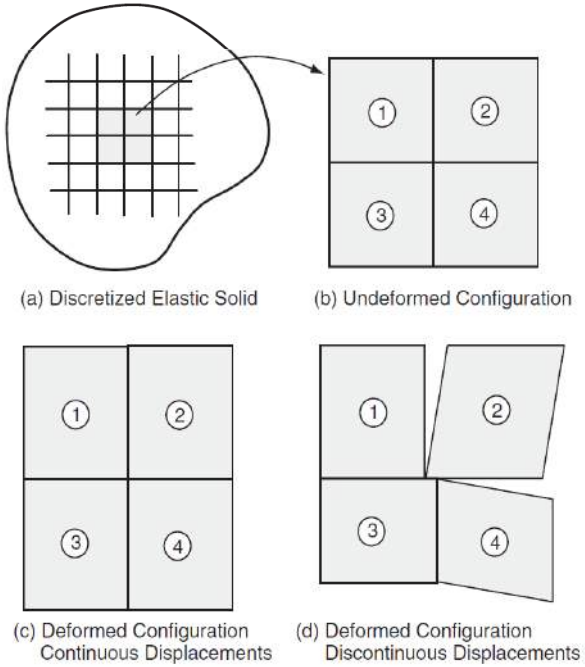
## Equações de compatibilidade

A partir do campo dos deslocamentos **u**(x,y,z), é sempre possível obter o campo das deformações que lhe está associado, de uma forma unívoca, por derivação directa das respectivas componentes:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\partial u}{\partial x} \; ; \quad \varepsilon_{yy} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \; ; \quad \varepsilon_{zz} = \dfrac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x} \; ; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial y} \; ; \quad \gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \end{cases}$$

## Equações de compatibilidade

Defina-se arbitráriamente seis funções uniformes e contínuas $\varepsilon_{xx}$, $\varepsilon_{yy}$, $\varepsilon_{zz}$, $\gamma_{xy}$, $\gamma_{yz}$ e $\gamma_{xz}$ das variáveis x, y, z. Se se considerar agora o corpo material dividido em elementos e se forem suprimidas as conexões internas que os unem uns aos outros, é possivel fazer corresponder àquele sistema arbitrário de seis funções uma deformação efectiva de qualquer um dos elementos de volume considerados. No entanto, o mais provável é que essas deformações não sejam mutuamente compatíveis, de tal modo que as superfícies exteriores de elementos contíguos deformados se não adaptem umas às outras, para reconstituir, sem vazios nem sobreposições, o todo contínuo que é o corpo deformado.




(Sadd, Elasticity, Elsevier, 2009)

## Equações de compatibilidade

As seis componentes da deformação não podem ser fixadas arbitrariamente, devendo satisfazer determinadas condições que garantam a existência das três funções contínuas u(x,y,z), v(x,y,z) e w(x,y,z), capazes de definirem uma deformação coerente de todo o corpo. Essas condições são traduzidas por seis equações, denominadas Equações de Compatibilidade das deformações.

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$ Derivando em ordem a x e a y obtém-se: $$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y} \therefore \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} \quad ; \quad \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y}$$

Substituindo:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$ ⇒ Equação de compatibilidade das deformações.

## Equações de compatibilidade

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)$$

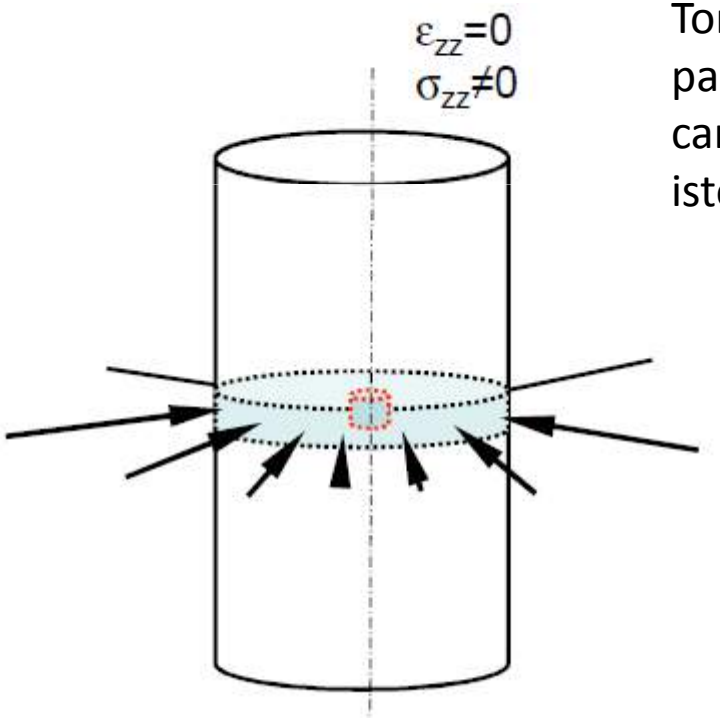
$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

Estas equações têm de ser satisfeitas para qualquer campo de deformações admissível.

## Estado plano de deformação

O estado plano de deformação corresponde a uma situação em que não há escorregamento ou corte entre planos perpendiculares a uma dada direcção. É o caso, por exemplo, de um corpo cilíndrico de grande espessura, solicitado por forças que actuam perpendicularmente ao eixo e distribuidas uniformemente ao longo de toda a espessura.




Tomando o eixo dos zz orientado segundo essa direcção particular, o estado plano de deformação será, portanto, caracterizado por serem nulas as componentes $\varepsilon_{zz}$, $\gamma_{yz}$ e $\gamma_{xz}$, isto é:

$$\varepsilon_{zz} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$$

$$[\varepsilon] = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & 0 \\ \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{xx}=\varepsilon_{xx}(x,y)$$
$$\varepsilon_{yy}=\varepsilon_{yy}(x,y)$$
$$\gamma_{xy}=\gamma_{xy}(x,y)$$

## Estado plano de deformação

Num estado plano de deformação, a extensão linear ε segundo uma direcção paralela ao plano Oxy e inclinada de um ângulo θ relativamente ao eixo dos xx, **n** ={cosθ , senθ ,0}$^T$, é dada por:

$$\varepsilon = \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}) + \tfrac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})\cos 2\theta + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy} sen2\theta$$

A deformação de corte, sobre o plano perpendicular a essa direcção, é dada por:

$$\tfrac{1}{2}\gamma = -\tfrac{1}{2}(\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy})sen2\theta + \tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\cos 2\theta$$

A deformação de corte anula-se para um ângulo $\theta_p$, definido pela equação: $tg(2\theta_p) = \dfrac{\gamma_{xy}}{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}$

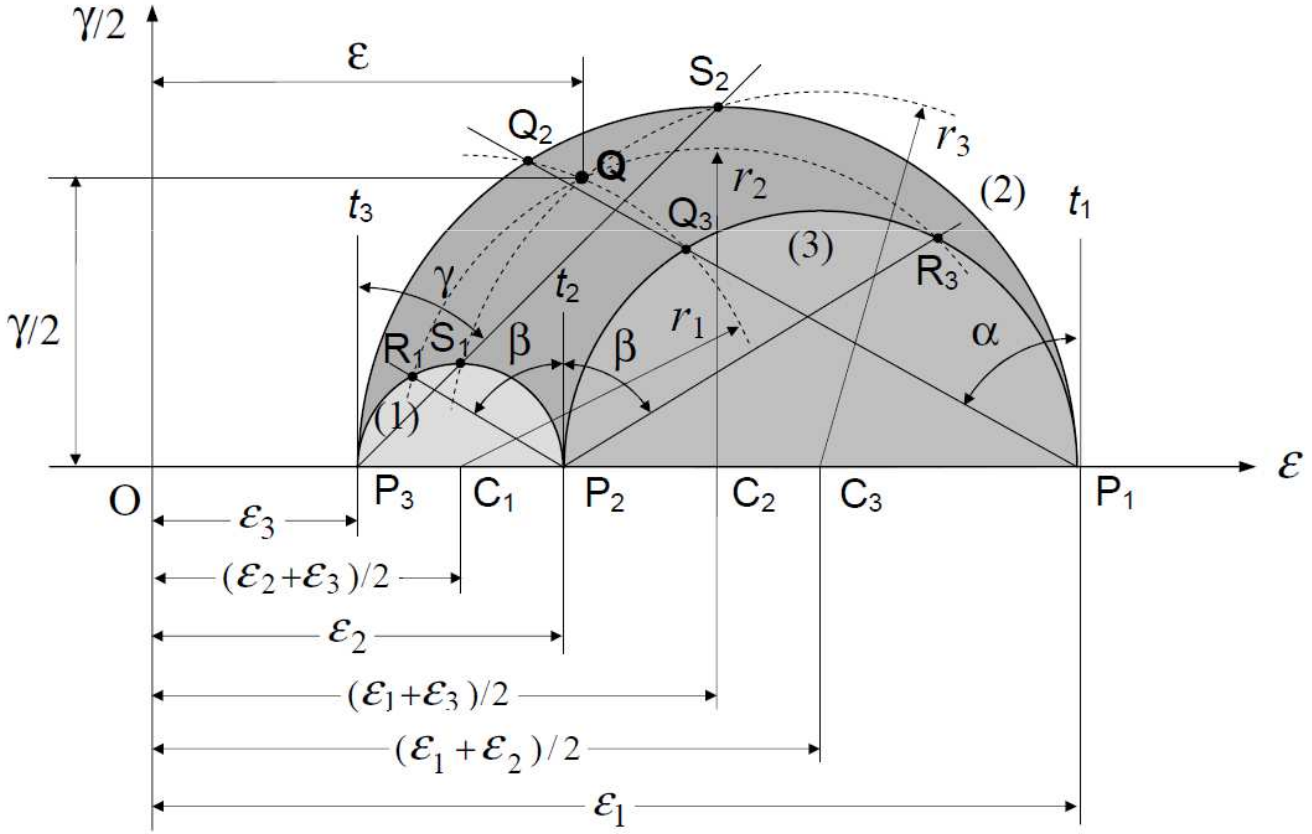
Existem duas direcções mutuamente perpendiculares que satisfazem esta condição. São as direcções principais de deformação $\mathbf{n_1}$ e $\mathbf{n_2}$, as quais correspondem às extensões principais $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2$, dadas pelas expressões:

$$\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$

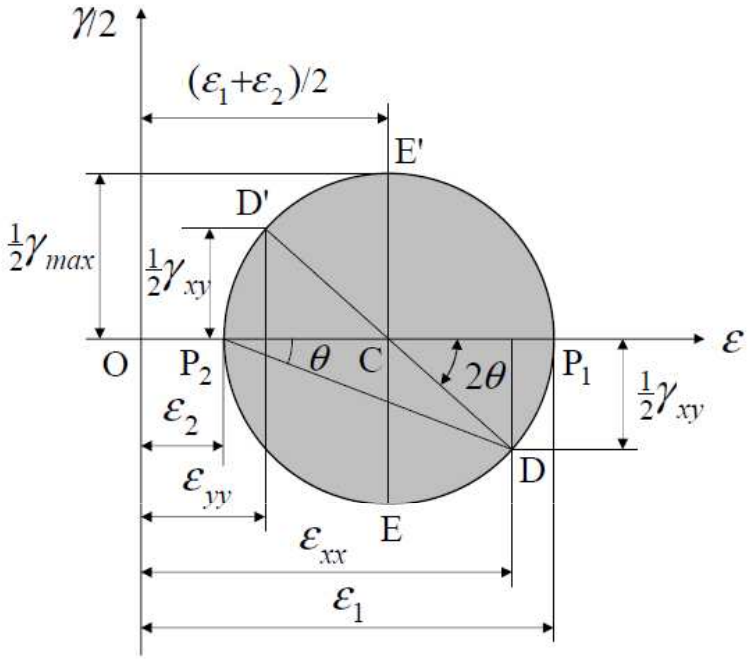
$$\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}}{2} - \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_{xx} - \varepsilon_{yy}}{2}\right)^2 + \left(\tfrac{1}{2}\gamma_{xy}\right)^2}$$

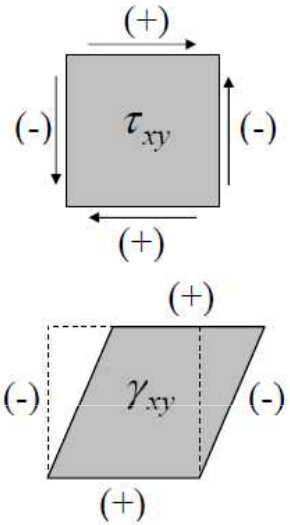
## Círculo de Mohr para o estado de deformação

Existe uma construção de Mohr para as deformações ($\varepsilon_\pi$, $\gamma_\pi$), em tudo semelhante à construção homóloga para as tensões, com a única diferença de que as tensões normais ($\sigma$) são substituídas por ($\varepsilon_\pi$) e as tensões de corte ($\tau$) por metade das deformações de corte ($\gamma_\pi/2$):



## Círculo de Mohr para o estado plano de deformação



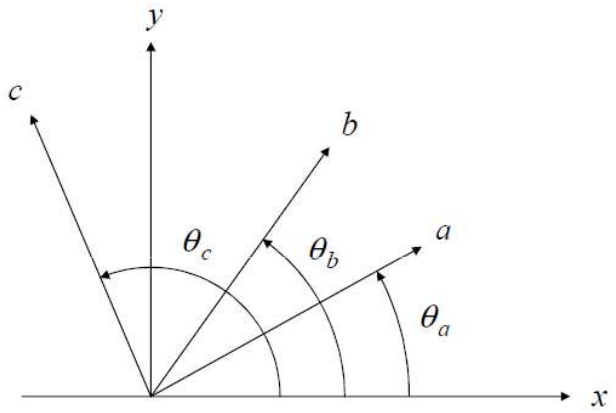




Quando a deformação angular γ é positiva, ($\gamma_{xy} > 0$), o ponto D representativo da direcção Ox é marcado a uma distância ½$\gamma_{xy}$ para baixo do eixo horizontal, e o ponto D' representativo da direcção Oy , a uma distância ½$\gamma_{xy}$ para cima; e vice-versa, quando a deformação angular $\gamma_{xy}$ é negativa. A convenção para o sinal da deformação de corte coincide com a que foi adoptada na construção do círculo de Mohr para as tensões.

## Análise de rosetas

Experimentalmente, é mais fácil medir directamente as extensões lineares do que as distorções. Por isso, é frequente pôr-se o problema de determinar as extensões principais num ponto, a partir da medição das extensões lineares $\varepsilon_a$, $\varepsilon_b$, $\varepsilon_c$, segundo três direcções distintas sobre o plano de deformação.



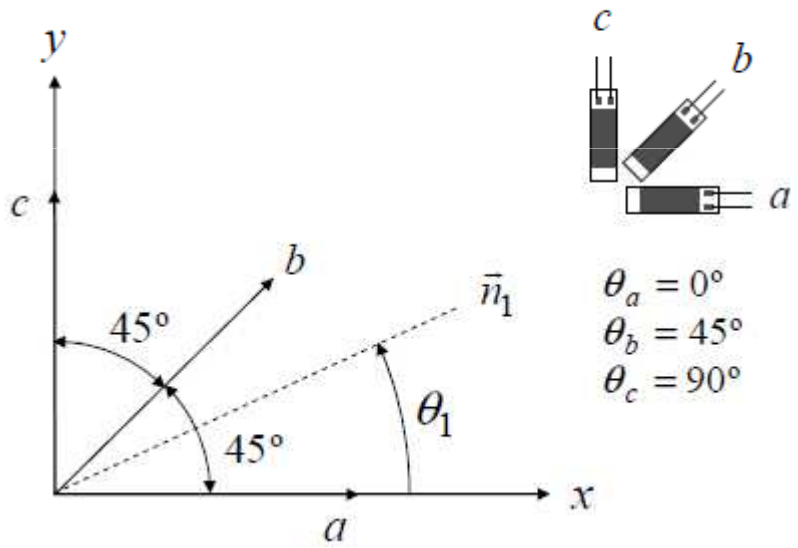

Suponha-se que aquelas três direcções fazem ângulos $\theta_a$, $\theta_b$ e $\theta_c$ , respectivamente, com a direcção do eixo dos xx. Pode escrever-se:

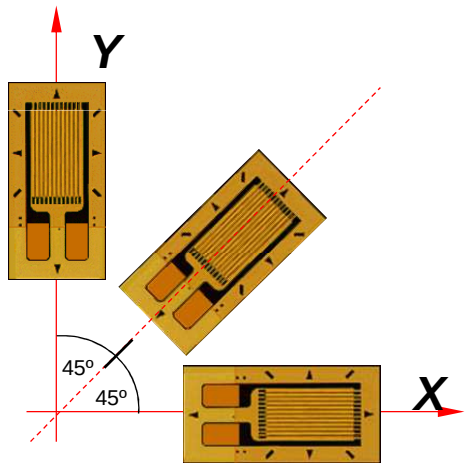
$$\begin{cases} \varepsilon_a = \varepsilon_{xx} cos^2(\theta_a) + \varepsilon_{yy} sen^2(\theta_a) + \gamma_{xy} sen(\theta_a) cos(\theta_a) \\ \varepsilon_b = \varepsilon_{xx} cos^2(\theta_b) + \varepsilon_{yy} sen^2(\theta_b) + \gamma_{xy} sen(\theta_b) cos(\theta_b) \\ \varepsilon_c = \varepsilon_{xx} cos^2(\theta_c) + \varepsilon_{yy} sen^2(\theta_c) + \gamma_{xy} sen(\theta_c) cos(\theta_c) \end{cases}$$

## Análise de rosetas

*Roseta rectangular de três elementos*

Corresponde à situação em que as três direcções estão espaçadas de 45˚. Nas aplicações práticas esta situação é materializado através das rosetas rectangulares de três extensómetros, que têm um aspecto conforme representado nas seguintes figuras.



## Análise de rosetas

*Roseta rectangular de três elementos*

$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} + \dfrac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_a + \varepsilon_c}{2} - \dfrac{1}{2}\sqrt{(\varepsilon_a - \varepsilon_c)^2 + (2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c)^2} \end{cases}$$

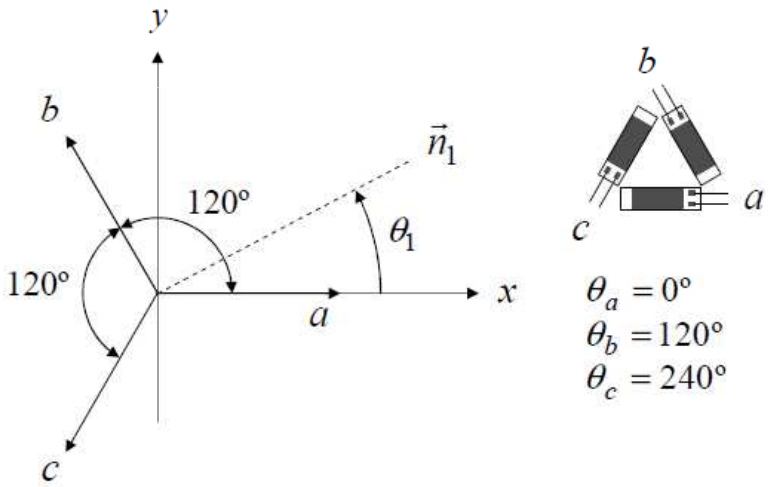
$$tg(2\theta_{1,2}) = \frac{2\varepsilon_b - \varepsilon_a - \varepsilon_c}{\varepsilon_a - \varepsilon_c}$$

$$\begin{array}{lll} (i) & 0 < \theta_1 < \pi/2, & \text{quando } \varepsilon_b > (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2 \\ (ii) & -\pi/2 < \theta_1 < 0, & \text{quando } \varepsilon_b < (\varepsilon_a + \varepsilon_c)/2 \\ (iii) & \theta_1 = 0, & \text{quando } \varepsilon_a > \varepsilon_c \text{ e } \varepsilon_a = \varepsilon_1 \\ (iv) & \theta_1 = \pm\pi/2, & \text{quando } \varepsilon_a < \varepsilon_c \text{ e } \varepsilon_a = \varepsilon_2 \end{array}$$

## Análise de rosetas

*Roseta delta de três elementos*

Corresponde à situação em que as três direcções estão espaçadas de 120˚. Nas aplicações práticas esta situação é materializado através das rosetas rectangulares de três extensómetros, que têm um aspecto conforme representado na seguinte figura.



## Análise de rosetas

*Roseta delta de três elementos*

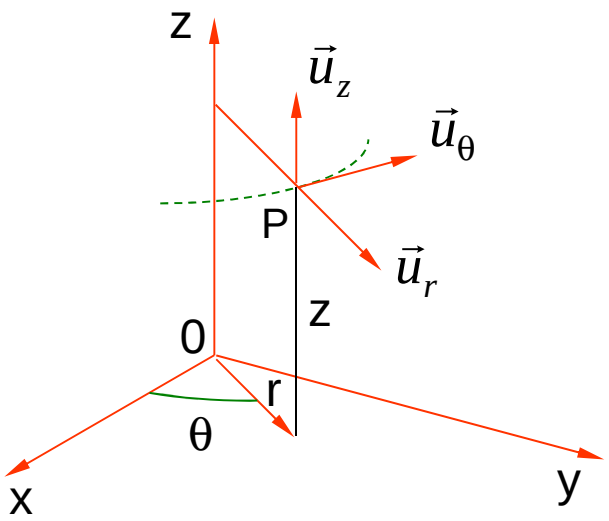
$$\begin{cases} \varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} + \sqrt{\left[\varepsilon_a - \dfrac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3}\right]^2 + \dfrac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{3}} \\ \varepsilon_2 = \dfrac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3} - \sqrt{\left[\varepsilon_a - \dfrac{\varepsilon_a + \varepsilon_b + \varepsilon_c}{3}\right]^2 + \dfrac{(\varepsilon_c - \varepsilon_b)^2}{3}} \end{cases}$$

$$tg(2\theta_{1,2}) = \frac{\sqrt{3}(\varepsilon_c - \varepsilon_b)}{2\varepsilon_a - (\varepsilon_b + \varepsilon_c)}$$

$$\begin{aligned} &(i) && 0 < \theta_1 < \pi/2, && \text{quando } \varepsilon_c > \varepsilon_b \\ &(ii) && -\pi/2 < \theta_1 < 0, && \text{quando } \varepsilon_c < \varepsilon_b \\ &(iii) && \theta_1 = 0, && \text{quando } \varepsilon_b = \varepsilon_c \text{ e } \varepsilon_a > \varepsilon_b \\ &(iv) && \theta_1 = \pm\pi/2, && \text{quando } \varepsilon_b = \varepsilon_c \text{ e } \varepsilon_a < \varepsilon_b \end{aligned}$$

## Coordenadas cilindrícas

Coordenadas cilíndricas r, θ e z




Em cada ponto P considera-se o triedro $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$

$$x = r\cos(\theta)$$
$$y = r\,\mathrm{sen}(\theta)$$
$$\vec{u}_r = (\cos\theta, sen\theta, 0)$$
$$\vec{u}_\theta = (-sen\theta, \cos\theta, 0)$$
$$\vec{u}_z = (0, 0, 1)$$

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ u_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u\cos\theta + v\sin\theta \\ -u\sin\theta + v\cos\theta \\ w \end{Bmatrix}$$

## Coordenadas cilindrícas

Coordenadas cilíndricas r, θ e z

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \right)\cos\theta + \left( \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r} \right)\sin\theta$$

$\frac{\partial z}{\partial r}$ = 0 $\qquad$ $\frac{\partial z}{\partial r}$ = 0

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} = \left( \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta \right)\cos\theta + \left( \frac{\partial v}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin\theta \right)\sin\theta =$$

$$= \frac{\partial u}{\partial x}\cos^2\theta + \frac{\partial v}{\partial y}\sin^2\theta + \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)\sin\theta\cos\theta =$$

$$= \varepsilon_{xx}\cos^2\theta + \varepsilon_{yy}\sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

## Coordenadas cilindrícas

Por outro lado:

$$[\varepsilon]_{0r\theta z} = [T][\varepsilon]_{0xyx}[T]^T \therefore \varepsilon_{rr} = \varepsilon_{xx}\cos^2\theta + \varepsilon_{yy}\sin^2\theta + \gamma_{xy}\sin\theta\cos\theta$$

Resultando:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}$$

Para as restantes extensões e distorções:

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta r} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{\theta z} = \gamma_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial (r\theta)} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{rz} = \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

*Exercícios*

**2.2.8** Num ponto P da superfície livre dum corpo material, mediram-se as deformações lineares segundo três direcções a, b, c espaçadas de 45˚:

$$\varepsilon_a = 1000 \times 10^{-6}; \quad \varepsilon_b = 400 \times 10^{-6}; \quad \varepsilon_c = 200 \times 10^{-6}$$

a) Determine as deformações principais no ponto considerado e as respectivas orientações.

b) Determine o valor da deformação de corte máxima e a orientação do plano segundo o qual ela se processa.

c) Resolva as alíneas anteriores recorrendo exclusivamente à construção dos círculos de Mohr.

# Aula #9

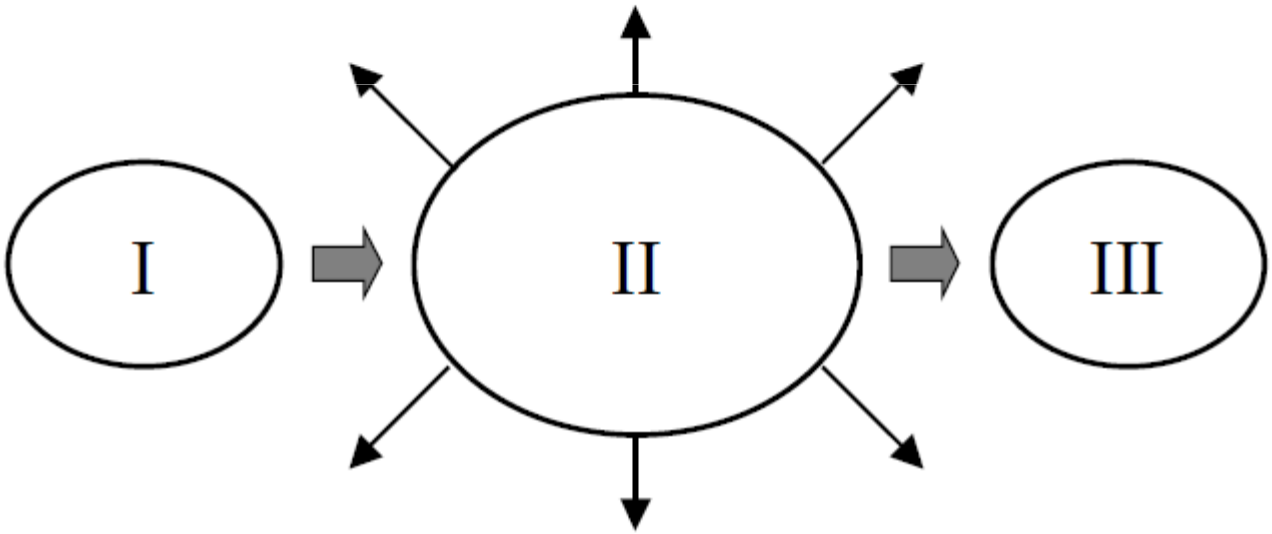
## Sumário:

- Relações tensão-deformação.
- Energia elástica de deformação.
- Formulação geral de problemas de elasticidade.
- Princípio de Saint-Venant.
- Problemas 3.2.1, 3.2.3 e 3.2.4.

## Relações tensão-deformação

*Introdução. Noção de corpo elástico*

Quando sobre um corpo elástico são aplicadas forças de intensidades gradualmente crescentes, verifica-se experimentalmente que, até se atingir um determinado valor limite, o corpo comporta-se como perfeitamente elástico, na medida em que recuperará totalmente as deformações produzidas, re-assumindo a forma e dimensões originais:

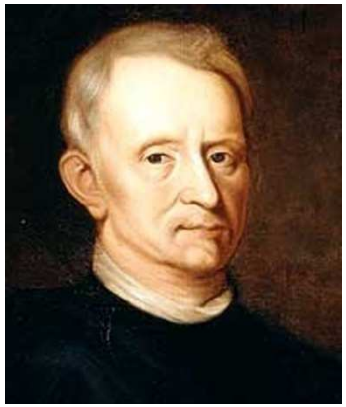



Configuração (III) = Configuração (I)

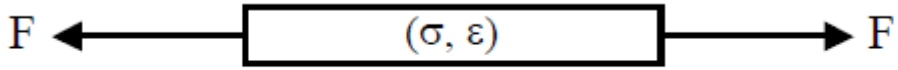
## Relações tensão-deformação

*Introdução. Noção de corpo elástico*

A primeira formulação de uma ligação entre a deformação e as forças aplicadas ao corpo foi proposta por Robert Hooke, estabelecendo uma relação de proporcionalidade directa entre aquelas duas grandezas para uma barra linear à tracção:



Robert Hooke (1635-1703)




$$\sigma = E\varepsilon$$

σ = F / A é a tensão, E é a constante de proporcionalidade e ε a deformação longitudinal da barra

## Relações tensão-deformação

*Lei de Hooke generalizada*

Uma generalização natural da lei de Hooke, consiste em considerar que, em todos os pontos, cada uma das seis componentes da tensão se pode exprimir como uma combinação linear das seis componentes da deformação, e inversamente. É a chamada lei de Hooke generalizada:

$$\sigma_{xx} = E_{11}\varepsilon_{xx} + E_{12}\varepsilon_{yy} + E_{13}\varepsilon_{zz} + E_{14}\gamma_{xy} + E_{15}\gamma_{yz} + E_{16}\gamma_{xz}$$
$$\sigma_{yy} = E_{21}\varepsilon_{xx} + E_{22}\varepsilon_{yy} + E_{23}\varepsilon_{zz} + E_{24}\gamma_{xy} + E_{25}\gamma_{yz} + E_{26}\gamma_{xz}$$
$$\sigma_{zz} = E_{31}\varepsilon_{xx} + E_{32}\varepsilon_{yy} + E_{33}\varepsilon_{zz} + E_{34}\gamma_{xy} + E_{35}\gamma_{yz} + E_{36}\gamma_{xz}$$
$$\tau_{xy} = E_{41}\varepsilon_{xx} + E_{42}\varepsilon_{yy} + E_{43}\varepsilon_{zz} + E_{44}\gamma_{xy} + E_{45}\gamma_{yz} + E_{46}\gamma_{xz}$$
$$\tau_{yz} = E_{51}\varepsilon_{xx} + E_{52}\varepsilon_{yy} + E_{53}\varepsilon_{zz} + E_{54}\gamma_{xy} + E_{55}\gamma_{yz} + E_{56}\gamma_{xz}$$
$$\tau_{xz} = E_{61}\varepsilon_{xx} + E_{62}\varepsilon_{yy} + E_{63}\varepsilon_{zz} + E_{64}\gamma_{xy} + E_{65}\gamma_{yz} + E_{66}\gamma_{xz}$$

## Relações tensão-deformação

*Lei de Hooke generalizada*

Inversamente:

$$\varepsilon_{xx} = E'_{11}\sigma_{xx} + E'_{12}\sigma_{yy} + E'_{13}\sigma_{zz} + E'_{14}\tau_{xy} + E'_{15}\tau_{yz} + E'_{16}\tau_{xz}$$
$$\varepsilon_{yy} = E'_{21}\sigma_{xx} + E'_{22}\sigma_{yy} + E'_{23}\sigma_{zz} + E'_{24}\tau_{xy} + E'_{25}\tau_{yz} + E'_{26}\tau_{xz}$$
$$\varepsilon_{zz} = E'_{31}\sigma_{xx} + E'_{32}\sigma_{yy} + E'_{33}\sigma_{zz} + E'_{34}\tau_{xy} + E'_{35}\tau_{yz} + E'_{36}\tau_{xz}$$
$$\gamma_{xy} = E'_{41}\sigma_{xx} + E'_{42}\sigma_{yy} + E'_{43}\sigma_{zz} + E'_{44}\tau_{xy} + E'_{45}\tau_{yz} + E'_{46}\tau_{xz}$$
$$\gamma_{yz} = E'_{51}\sigma_{xx} + E'_{52}\sigma_{yy} + E'_{53}\sigma_{zz} + E'_{54}\tau_{xy} + E'_{55}\tau_{yz} + E'_{56}\tau_{xz}$$
$$\gamma_{xz} = E'_{61}\sigma_{xx} + E'_{62}\sigma_{yy} + E'_{63}\sigma_{zz} + E'_{64}\tau_{xy} + E'_{65}\tau_{yz} + E'_{66}\tau_{xz}$$

Em qualquer das formas que se represente a lei de Hooke generalizada, estão envolvidos 36 parâmetros elásticos.

## Relações tensão-deformação

*Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos*

Considere-se, num ponto P dum corpo elástico isotrópico, as equações da lei de Hooke generalizada referidas ao triedro das direcções principais em P, $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}^T$:

$$\sigma_1 = E_{11}\varepsilon_1 + E_{12}\varepsilon_2 + E_{13}\varepsilon_3$$
$$\sigma_2 = E_{22}\varepsilon_1 + E_{22}\varepsilon_2 + E_{23}\varepsilon_3$$
$$\sigma_3 = E_{31}\varepsilon_1 + E_{32}\varepsilon_2 + E_{33}\varepsilon_3$$

A condição de isotropia implica que o efeito de uma deformação $\varepsilon_1$ sobre a tensão $\sigma_1$ deve ser o mesmo que o efeito de $\varepsilon_2$ sobre $\sigma_2$ e o efeito de $\varepsilon_3$ sobre $\sigma_3$. Isto quer dizer que $E_{11}= E_{22}= E_{33}$. Do mesmo modo, pela condição de isotropia, os efeitos das deformações $\varepsilon_2$ e $\varepsilon_3$ sobre a tensão $\sigma_1$ devem ser iguais. Portanto, $E_{12}= E_{13}$. Pela mesma razão, deverá ser $E_{21}= E_{23}$ e $E_{31}= E_{32}$. Além disso, os efeitos de $\varepsilon_2$ e $\varepsilon_3$ sobre $\sigma_1$ devem ser iguais aos efeitos de $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_3$ sobre $\sigma_2$ e de $\varepsilon_1$ e $\varepsilon_2$ sobre $\sigma_3$. Então, deverá ser:

$$E_{11}= E_{22}= E_{33} = a$$

$$E_{12} = E_{21} = E_{13} = E_{31} = E_{23} = E_{32} = b$$

## Relações tensão-deformação

*Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos*

Resulta então:

$$\begin{cases} \sigma_1 = a\varepsilon_1 + b(\varepsilon_2 + \varepsilon_3) \\ \sigma_2 = a\varepsilon_2 + b(\varepsilon_3 + \varepsilon_1) \\ \sigma_3 = a\varepsilon_3 + b(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_1 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_1 \\ \sigma_2 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_2 \\ \sigma_3 = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_3 \end{cases}$$

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = J_1$$

$$\begin{cases} \lambda = a \\ \mu = (a\text{-}b)/2 \end{cases} \Rightarrow \text{Parâmetros de Lamé}$$

## Relações tensão-deformação

*Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos*

Relativamente a um sistema de eixos Cartesiano arbitrário 0xyz:

$$\sigma_{xx} = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2 \longrightarrow \sigma_{xx} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{xx}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{yy}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_{zz}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_1 ll' + \sigma_2 mm' + \sigma_3 nn' \longrightarrow \tau_{xy} = \mu\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \mu\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \mu\gamma_{zx}$$

## Relações tensão-deformação

*Lei de Hooke generalizada para materiais isotrópicos*

Inversamente:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(\sigma_{yy}+\sigma_{zz})$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{yy} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(\sigma_{zz}+\sigma_{xx})$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\lambda+\mu}{\mu(3\lambda+2\mu)}\sigma_{zz} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda+2\mu)}(\sigma_{xx}+\sigma_{yy})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{\mu}\tau_{xy}$$

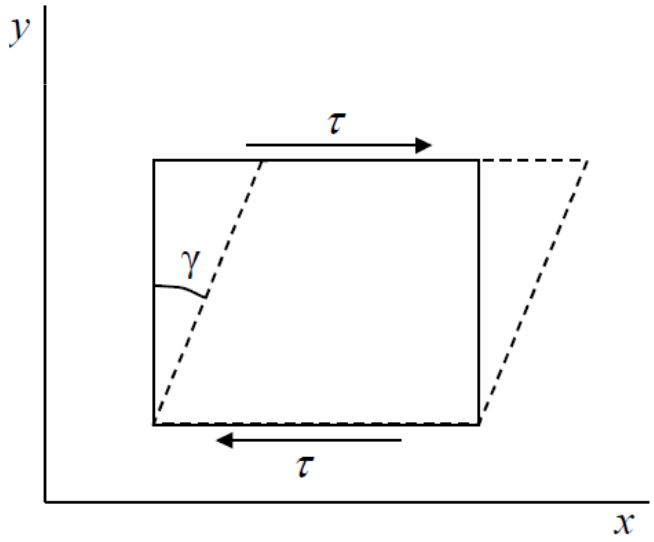
$$\gamma_{yz} = \frac{1}{\mu}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{1}{\mu}\tau_{zx}$$

## Relações tensão-deformação

*Módulo de rigidez*

Considere-se o caso bi-dimensional de corte puro representado na Figura. A relação entre a tensão de corte τ e a correspondente deformação de corte γ é, por definição, o módulo de elasticidade ao corte, ou módulo de rigidez do material, habitualmente representado pela letra maiúscula G: $\tau = G\,\gamma$




Por outro lado, o estado de corte pura representado na figura é caracterizado pelas seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = \tau$$

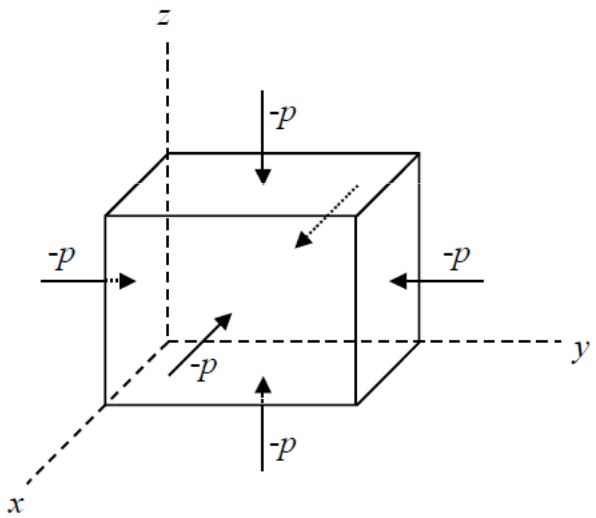
Aplicando a Lei de Hooke: $\gamma_{xy} = \gamma = \tau/\mu$

Donde, μ = G, isto é, o parâmetro de Lamé μ é numericamente igual ao módulo de rigidez G do material.

## Relações tensão-deformação

*Módulo de compressibilidade*

Outra constante elástica frequentemente utilizada nas aplicações em engenharia é o chamado módulo de Bulk, ou módulo de compressibilidade, K, que se define pela relação entre a pressão p e o coeficiente de dilatação volumétrica θ, num estado de tensão hidrostático:




$$p = -K\frac{\Delta V}{V} = -K\theta$$

O estado de tensão hidrostático é traduzido pelos seguintes componentes:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = -p$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$$

Substituindo nas três primeiras equações da lei de Hooke e adicionando membro a membro:

$$-3p = (3\lambda + 2\mu)\theta \Rightarrow p = -(\frac{3\lambda + 2\mu}{3})\theta = -K\theta \Rightarrow K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}$$

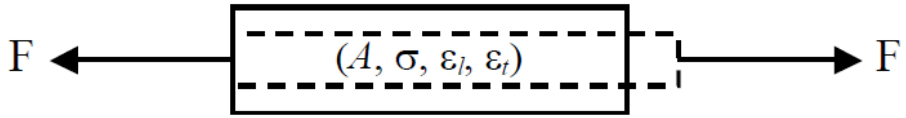
## Relações tensão-deformação

*Módulo de Young e coeficiente de Poisson*



Thomas Young (1773-1829)

No ensaio de tracção convencional, habitualmente utilizado para a determinação das propriedades mecânicas dos materiais, submete-se uma barra do material a estudar à acção de duas forças iguais e opostas, aplicadas segundo o eixo do provete.




O Módulo de Young (E) e o Coeficiente de Poisson (v) são duas constantes elásticas do material, definidas por:

$$\sigma = E\varepsilon_l \qquad \varepsilon_t = -\nu\varepsilon_l \left(= -\frac{\nu\sigma}{E}\right)$$

onde $\varepsilon_l$ e $\varepsilon_t$ são as extensões lineares nas direcções longitudinal e transversal, respectivamente.

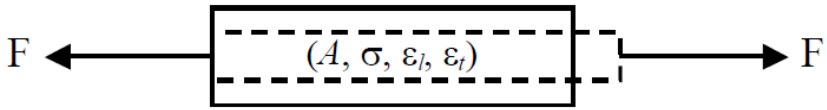


Siméon Dinis Poisson (1781-1840)

## Relações tensão-deformação

*Módulo de Young e coeficiente de Poisson*

Tomando o eixo dos xx segundo a direcção axial da peça, os estados de tensão e de deformação correspondentes à situação representada na figura são:




$$\begin{cases} \sigma_{xx} = \dfrac{F}{A} = \sigma \\ \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \varepsilon_{xx} = \varepsilon_l \,, \quad \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \varepsilon_t \\ \gamma_{xy} = \gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0 \end{cases}$$

Por outro lado, decorre directamente da lei de Hooke:

$$\begin{cases} \varepsilon_{xx} = \dfrac{\lambda + \mu}{\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{xx} \\ \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = -\dfrac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{xx} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E = \dfrac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} \\ \nu = \dfrac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \end{cases}$$

$E$ → Módulo de Young

$\nu$ → Coeficiente de Poisson

## Relações tensão-deformação

*Módulo de Young e coeficiente de Poisson*

O Módulo de Young e o Coeficiente de Poisson são as constantes elásticas mais frequentemente utilizadas. Em termos destas duas costantes, as equações da Lei de Hooke para um material isotrópico escrevem-se:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\left(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)\right]$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\left(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\right)\right]$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right)\right]$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$

$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}$$

$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx}$$

## Relações tensão-deformação

*Módulo de Young e coeficiente de Poisson*

Inversamente:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\right)\right]$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left[\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right]$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{xy}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{yz}$$

$$\gamma_{zx} = \frac{2\left(1+\nu\right)}{E}\tau_{zx}$$

## Relações tensão-deformação

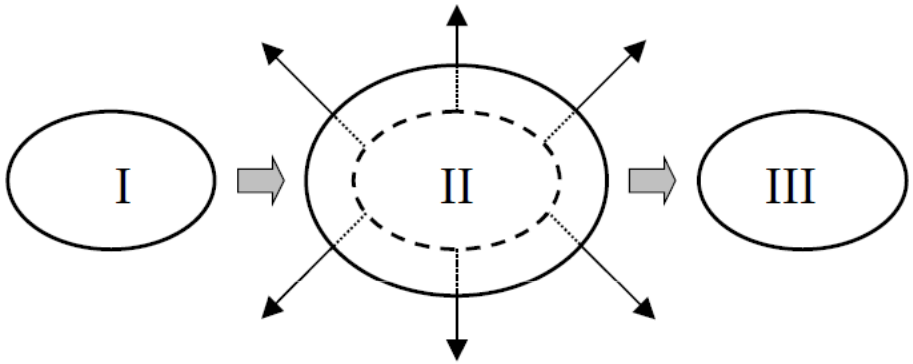
*Relações entre as constantes elásticas*

| | $\lambda$ | $\mu$ | $E$ | $\nu$ | $K$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $\lambda, \mu$ | ------ | ------ | $\frac{\mu(3\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}$ | $\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ | $\frac{3\lambda+2\mu}{3}$ |
| $\lambda, E$ | ------ | $\frac{A+(E-3\lambda)}{4}$ | ------ | $\frac{A-(E+\lambda)}{4\lambda}$ | $\frac{A+(3\lambda+E)}{6}$ |
| $\lambda, \nu$ | ------ | $\frac{\lambda(1-2\nu)}{2\nu}$ | $\frac{\lambda(1+\nu)(1-2\nu)}{\nu}$ | ------ | $\frac{\lambda(1+\nu)}{3\nu}$ |
| $\lambda, K$ | ------ | $\frac{3(K-\lambda)}{2}$ | $\frac{9K(K-\lambda)}{3K-\lambda}$ | $\frac{\lambda}{3K-\lambda}$ | ------ |
| $\mu, E$ | $\frac{2\mu-E}{E-3\mu}$ | ------ | ------ | $\frac{E-2\mu}{2\mu}$ | $\frac{E}{3(3\mu-E)}$ |
| $\mu, \nu$ | $\frac{2\mu\nu}{1-2\nu}$ | ------ | $2\mu(1+\nu)$ | ------ | $\frac{2\mu(1+\nu)}{3(1-2\nu)}$ |
| $\mu, K$ | $\frac{3K-2\mu}{3}$ | ------ | $\frac{9K\mu}{3K+\mu}$ | $\frac{3K-2\mu}{2(3K+\mu)}$ | ------ |
| $E, \nu$ | $\frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}$ | $\frac{E}{2(1+\nu)}$ | ------ | ------ | $\frac{E}{3(1-2\nu)}$ |
| $K, E$ | $\frac{3K(3K-E)}{9K-E}$ | $\frac{3EK}{9K-E}$ | ------ | $\frac{3K-E}{K}$ | ------ |
| $\nu, K$ | $\frac{3K\nu}{1+\nu}$ | $\frac{3K(1-2\nu)}{2(1+\nu)}$ | $3K(1-2\nu)$ | ------ | ------ |

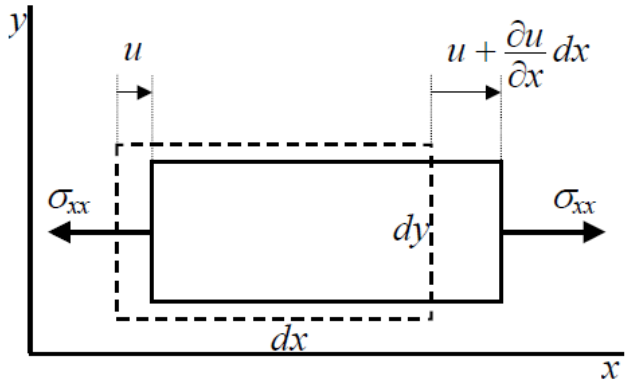
$A = \sqrt{E^2 + 2\lambda E + 9\lambda^2}$

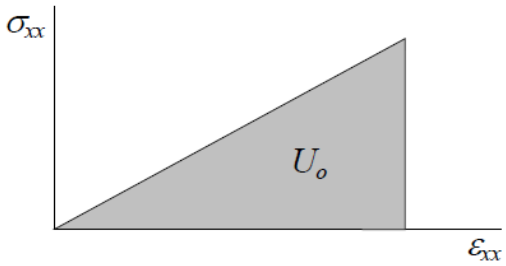
## Energia elástica de deformação

Quando um corpo elástico se deforma sob a acção de forças externas, estas realizam trabalho que fica armazenado no interior do corpo sob a forma de energia elástica de deformação, que poderá ser totalmente recuperada quando removidas as forças que provocam a deformação.




*Tracção uniaxial*




$$dW = dU = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} dydz)\frac{\partial u}{\partial x} dx$$

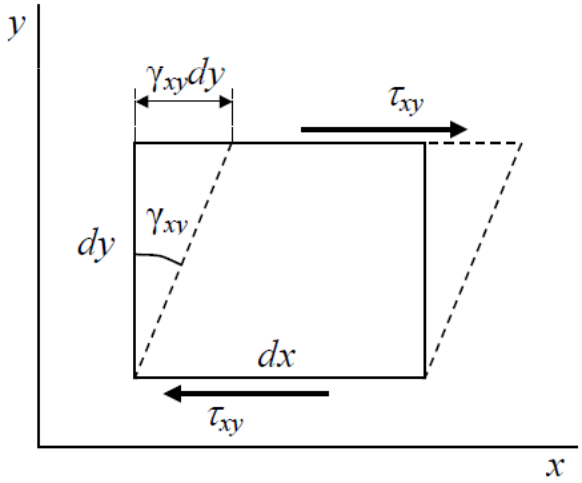
$$dU = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} dV$$

## Energia elástica de deformação

Densidade de energia elástica: $U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2}E\varepsilon_{xx}^2 = \frac{1}{2}\frac{\sigma_{xx}^2}{E}$

Quando actuam as três tensões normais: $U_0 = \frac{1}{2}(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{xx}\varepsilon_{xx})$

*Corte puro*




$$dW = dU = \frac{1}{2}(\tau_{xy}dxdz)\gamma_{xy}dy$$

$$dU = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy}dV$$

Densidade de energia elástica:

$$U_0 = \frac{dU}{dV} = \frac{1}{2}\tau_{xy}\gamma_{xy} = \frac{1}{2}G\gamma_{xy}^2 = \frac{1}{2}\frac{\tau_{xx}^2}{G}$$

Quando actuam as três tensões de corte: $U_0 = \frac{1}{2}(\tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{yz}\gamma_{yz} + \tau_{zx}\gamma_{zx})$

## Energia elástica de deformação

Caso geral:

$$U_0 = \frac{1}{2}\left(\sigma_{xx}\varepsilon_{xx} + \sigma_{yy}\varepsilon_{yy} + \sigma_{zz}\varepsilon_{zz} + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{yz}\gamma_{yz}\right)$$

Aplicando a lei de Hooke:

$$U_0 = \frac{1}{2E}(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) - \frac{\nu}{E}(\sigma_{xx}\sigma_{yy} + \sigma_{yy}\sigma_{zz} + \sigma_{xx}\sigma_{zz}) + \frac{1}{2G}(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)$$

Em termos das deformações:

$$U_0 = \frac{E}{2(1+\nu)}\left[\frac{\nu}{1-2\nu}\theta^2 + (\varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2) + \frac{1}{2}(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)\right]$$

## Energia elástica de deformação

Energia elástica total: $U = \int_V U_0 dV = \int_V U_0 dxdydz$

*Componentes da energia de deformação*

Qualquer estado de tensão pode decompor-se num estado de tensão hidrostático e num estado de tensão de desvio ou distorsional (sem variação de volume):

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_m & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_m & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma_{xx}-\sigma_m & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy}-\sigma_m & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \frac{1}{2}\gamma_{yz} & \sigma_{zz}-\sigma_m \end{bmatrix}$$

As duas componentes da energia de deformação $U_{0V}$ e $U_{0D}$ são dadas por:

$$U_{0V} = \frac{3}{2}(\sigma_m \varepsilon_m) = \frac{3}{2}\left(\sigma_m \frac{\sigma_m}{3K}\right) = \frac{\sigma_m^2}{2K} = \frac{1}{18K}\left(\sigma_{xx}+\sigma_{yy}+\sigma_{zz}\right)^2$$

$$U_{0D} = \frac{3}{4G}\frac{1}{9}\left[\left(\sigma_{xx}-\sigma_{yy}\right)^2 + \left(\sigma_{yy}-\sigma_{zz}\right)^2 + \left(\sigma_{zz}-\sigma_{xx}\right)^2 + 6\left(\tau_{xy}^2+\tau_{yz}^2+\tau_{zx}^2\right)\right] = \frac{3}{4G}\tau_{oct}^2$$

$$U_0 = U_{0V} + U_{0D}$$

## Formulação geral de problemas de elasticidade

### Funções a definir (15):

- Campo de tensões (seis componentes) $\longrightarrow \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$
- Campo de deformações (seis componentes) $\longrightarrow \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$
- Campo de deslocamentos (seis componentes) $\longrightarrow u, v, w$

### Equações de ligação (15)

- Seis equações de compatibilidade ou seis equações de ligação entre os campos de deformação e de deslocamentos:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$$
$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z}$$
$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$$
$$\gamma_{yz} = \gamma_{zy} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}$$
$$\gamma_{xz} = \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}$$

ou

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2}$$
$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)$$
$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)$$
$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right)$$

## Formulação geral de problemas de elasticidade

- Seis equações resultantes da lei de Hooke:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{xx} + \nu\left(\varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right)\right]$$
$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{yy} + \nu\left(\varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xx}\right)\right]$$
$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\nu)\ (1-2\nu)}\left[(1-\nu)\varepsilon_{zz} + \nu\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy}\right)\right]$$
$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{xy}$$
$$\tau_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{yz}$$
$$\tau_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)}\gamma_{zx}$$

- Três equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + F_x = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + F_y = 0$$
$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + F_z = 0$$

## Princípio de Saint-Venant

Se o sistema de forças que actua sobre uma pequena área da superfície dum corpo elástico for substituído por um outro sistema de forças estaticamente equivalente actuando sobre a mesma área da superfície do corpo, essa redistribuição da carga poderá produzir alterações substanciais das tensões e deformações na vizinhança imediata da zona de aplicação da carga, mas as tensões e as deformações permanecerão essencialmente inalteradas nas regiões do corpo mais afastadas, a partir de uma distância considerável em relação às dimensões da área de carregamento.



Adhémar Barré de Saint-Venant (1797-1886)

*Exercícios*

**3.2.1** O estado de deformação num ponto P de um corpo material em aço (λ=120GPa, μ=80GPa) é dado pelas seguintes componentes cartesianas:

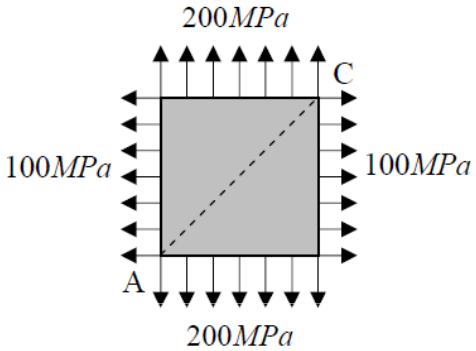
$$\varepsilon_{xx} = 1000\text{x}10^{-6} \qquad \varepsilon_{yy} = 500\text{x}10^{-6} \qquad \varepsilon_{zz} = 700\text{x}10^{-6}$$
$$\gamma_{yz} = 1000\text{x}10^{-6} \qquad \gamma_{xz} = 800\text{x}10^{-6} \qquad \gamma_{xy} = 200\text{x}10^{-6}$$

Determine o correspondente estado de tensão no ponto P.

**3.2.3** Determine a variação de volume de um cubo de aço (λ=120GPa , μ=80GPa) de 1 metro de lado, quando mergulhado no fundo do oceano, a 10.000 metros de profundidade.

*Exercícios*

**3.2.4** Uma placa em aço (E=210GPa, v=0,3), de dimensões 200mmx200mmx10mm está sujeita a um estado bi-axial de tensão uniforme, conforme ilustrado na figura.




a) Utilizando as equações relativas ao estado plano de tensão, determine a tensão de corte máxima e a direcção segundo a qual actua.
b) Determine o alongamento que sofre a diagonal AC.

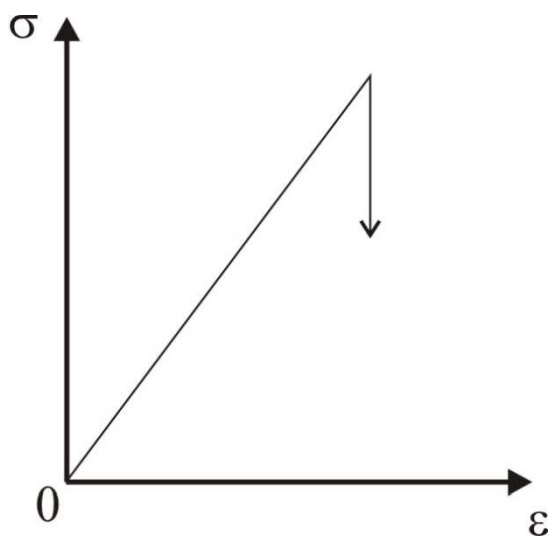
# Aula #10

## Sumário:

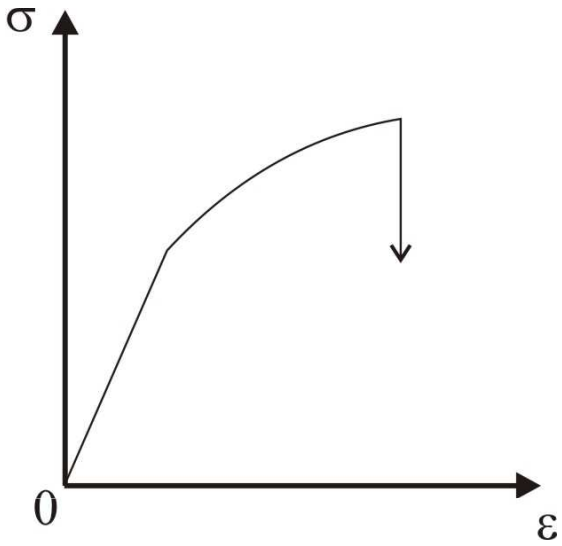
- Critérios de rotura: Rankine e Mohr-Coulomb.
- Critérios de cedência plástica: Tresca e Von Mises.
- Problemas 3.2.9 e 3.2.17.

## Critérios de cedência

Material frágil




Material dúctil




A questão que se coloca consiste em determinar as condições que levam à rotura de um material frágil e ao início de plastificação de um material dúctil para um estado multiaxial de tensão e de deformação.

É então necessário definir uma função escalar do tensor das tensões (ou das deformações) que delimita o regime elástico do comportamento mecânico dos materiais:

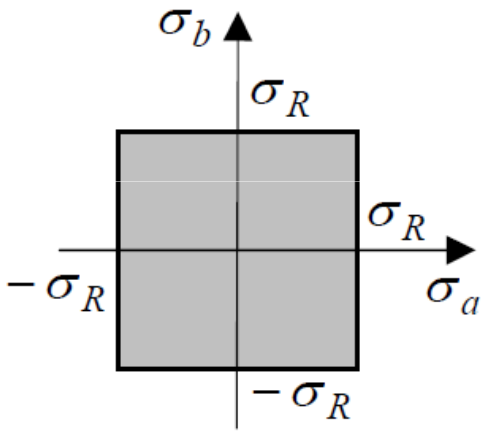
$$\Theta([\sigma]) \leq 0$$

## Critérios de rotura

*Critério de Rankine (ou da tensão principal máxima)*

$$\left|\sigma_{\max}\right| \leq \sigma_{rot}$$

Considerando um estado plano de tensão:



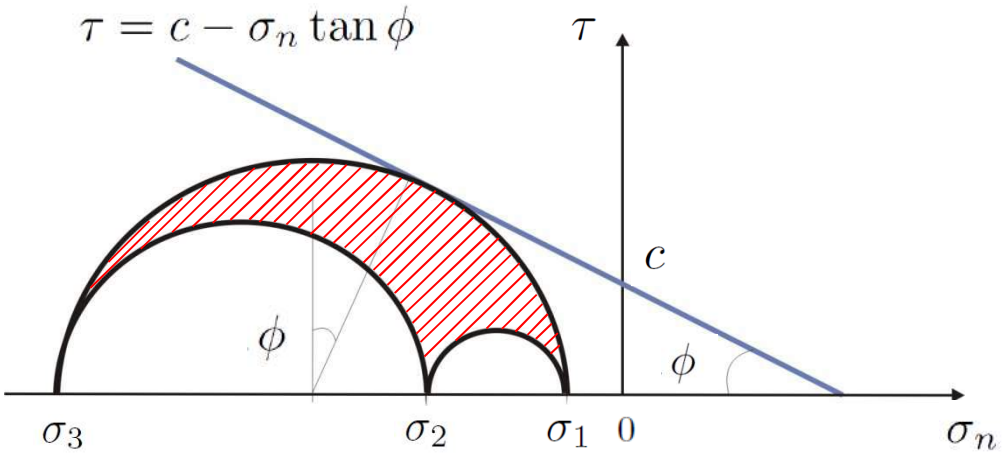

As condições de rotura de um material frágil são determinadas pela presença de defeitos, o que resulta num pronunciado efeito de escala: verifica-se que volumes superiores resultam em tensões de rotura inferiores. Desta forma, os critérios de rotura de materiais frágeis são frequentemente utilizados em combinação com análises não-determinísticas.

## Critérios de rotura

*Critério de Mohr-Coulomb*

O critério de Mohr-Coulomb é utilizado para prever a rotura de materiais frágeis e a deformação plástica de materiais com tensões de cedência plástica diferentes em tracção e compressão.

Considera-se que a rotura ocorre quando um estado de tensão é representado por um círculo de Mohr tangente à recta de rotura de Mohr. De uma forma equivalente, a rotura ocorre quando a tensão de corte e a tensão normal que actuam num plano satisfazem a seguinte condição:




$$\tau = c - \sigma \tan\phi$$

$c$: coesão; $\phi$: ângulo de fricção interna.

## Critérios de rotura

*Critério de Mohr-Coulomb*

O critério de Mohr-Coulomb pode ser escrito em termos das tensões principais da seguinte forma:

$$(\sigma_1 - \sigma_3) + (\sigma_1 + \sigma_3)\sin\phi = 2c\cos\phi$$

A coesão, $c$, e o ângulo de fricção interna, $\phi$, podem ser calculados a partir de dois círculos de Mohr, um correspondente a um estado de tracção uniaxial e outro a um estado de compressão uniaxial.

## Critérios de cedência plástica

*Critério de Tresca*

O critério de Tresca assume que a deformação plástica ocorre quando a tensão de corte máxima atinge um valor limite:

$$\tau_{\max} = \tau_{ced} \Rightarrow \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3) = \tau_{ced}$$

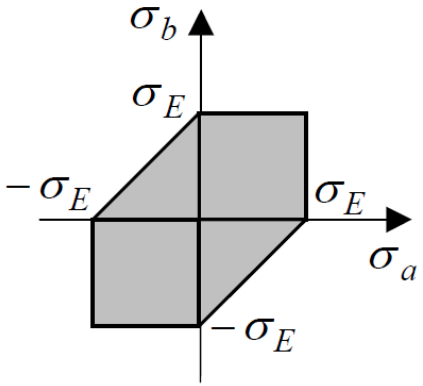
Considerando um ensaio de tracção uniaxial:

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2}\sigma_1 = \tau_{ced} \Rightarrow \frac{1}{2}\sigma_{ced} = \tau_{ced}$$

Desta forma, o critério de Tresca pode ser definido como:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_{ced}$$

De notar que o critério de Tresca é um caso particular do critério de Mohr-Coulomb, dado que os dois critérios coincidem quando $\phi$=0.



## Critérios de cedência plástica

*Critério de Von Mises*

O critério de Von Mises assume que a deformação plástica ocorre quando a tensão de corte octaédrica atinge um valor limite. Este critério pode ser traduzido, de uma forma totalmente equivalente, na consideração que a deformação plástica ocorre quando o segundo invariante das tensões de desvio atinge um valor limite.

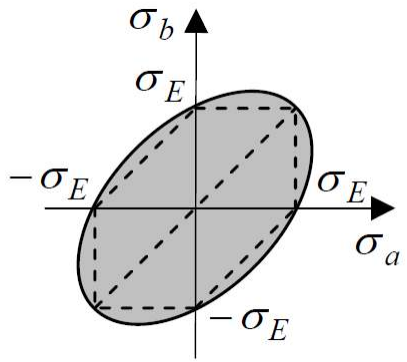
$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_2)^2} = \tau_{oct}^{\max}$$

Considerando um ensaio de tracção uniaxial:

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{2(\sigma_1)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_1 = \frac{\sqrt{2}}{3}\sigma_{ced} = \tau_{oct}^{\max}$$

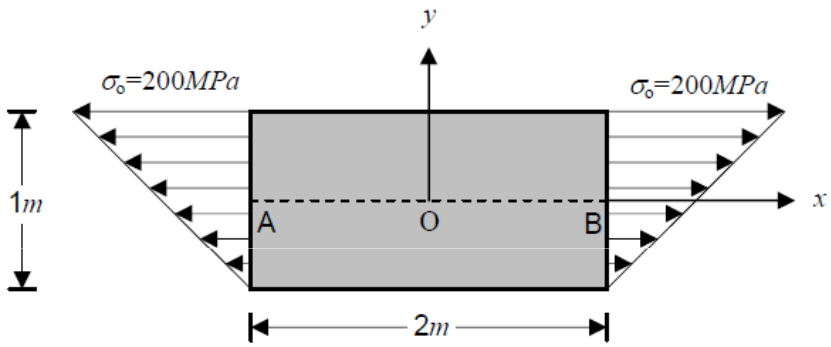
Donde:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(\sigma_1-\sigma_2)^2+(\sigma_1-\sigma_3)^2+(\sigma_3-\sigma_2)^2} = \sigma_{ced}$$



*Exercícios*

**3.2.9** Uma placa rectangular em aço, (E=200 GPa, ν=0.3), com as dimensões de 2m x 1m e espessura de 10 mm, está solicitada ao longo das faces de menor dimensão por duas distribuições lineares de pressão, iguais e opostas, conforme ilustrado na figura:




a) Demonstre que tal campo de tensões só é compatível se for nulo o campo das forças de volume.

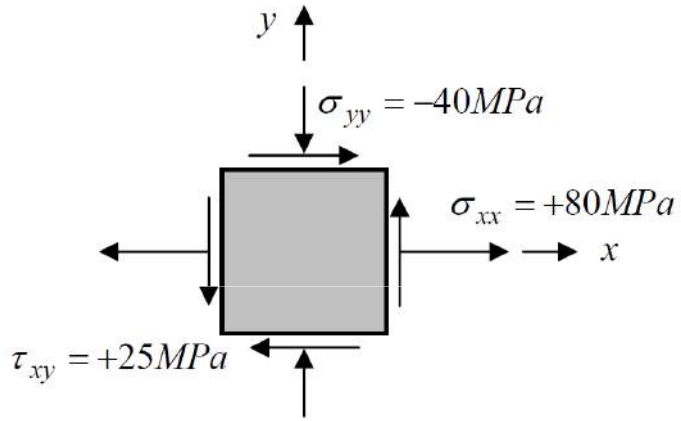
b) Desenhe um elemento de volume no centro da placa, com os lados inclinados a 45˚ em relação aos eixo coordenados e, sobre eles, represente as correspondentes tensões normais e de corte.

c) Determine a distribuição dos deslocamentos ao longo do lado AB, (recta de equação y = 0).

d) Calcule a energia elástica de deformação acumulado na placa.

*Exercícios*

**3.2.17** Num determinado componente mecânico, o estado de tensão mais desfavorável ocorre num ponto da superfície livre da peça, e corresponde à situação representada na figura. O material utilizado é o aço, com uma tensão limite de cedência $\sigma_{ced}$=250MPa.




Determine o coeficiente de segurança relativamente à plastificação do material, utilizando:

a) O critério de Tresca.
b) O critério de Von Mises.
c) Considerando que o componente é fabricado num material frágil com uma tensão de rotura à tracção de 100MPa e uma tensão de rotura à compressão de 300MPa, verifique se há rotura do material aplicando o critério de Mohr-Coulomb.

# Aula #11

## Sumário:

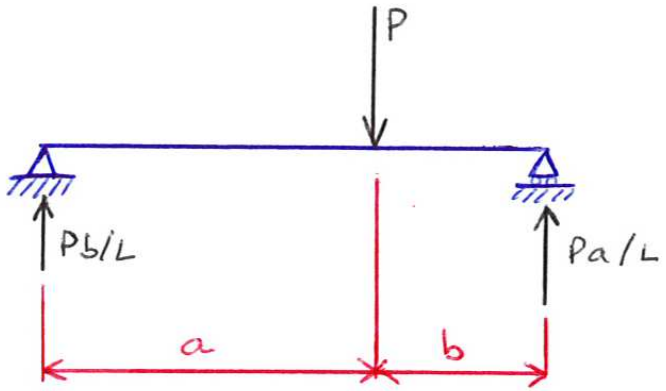
- Diagramas de esforços.
- Resolução de exercícios.

## Diagramas de esforços

Antes de se proceder ao traçado do diagrama de esforços é necessário calcular as reacções nos apoios utlizando as equações de equilíbrio estático:

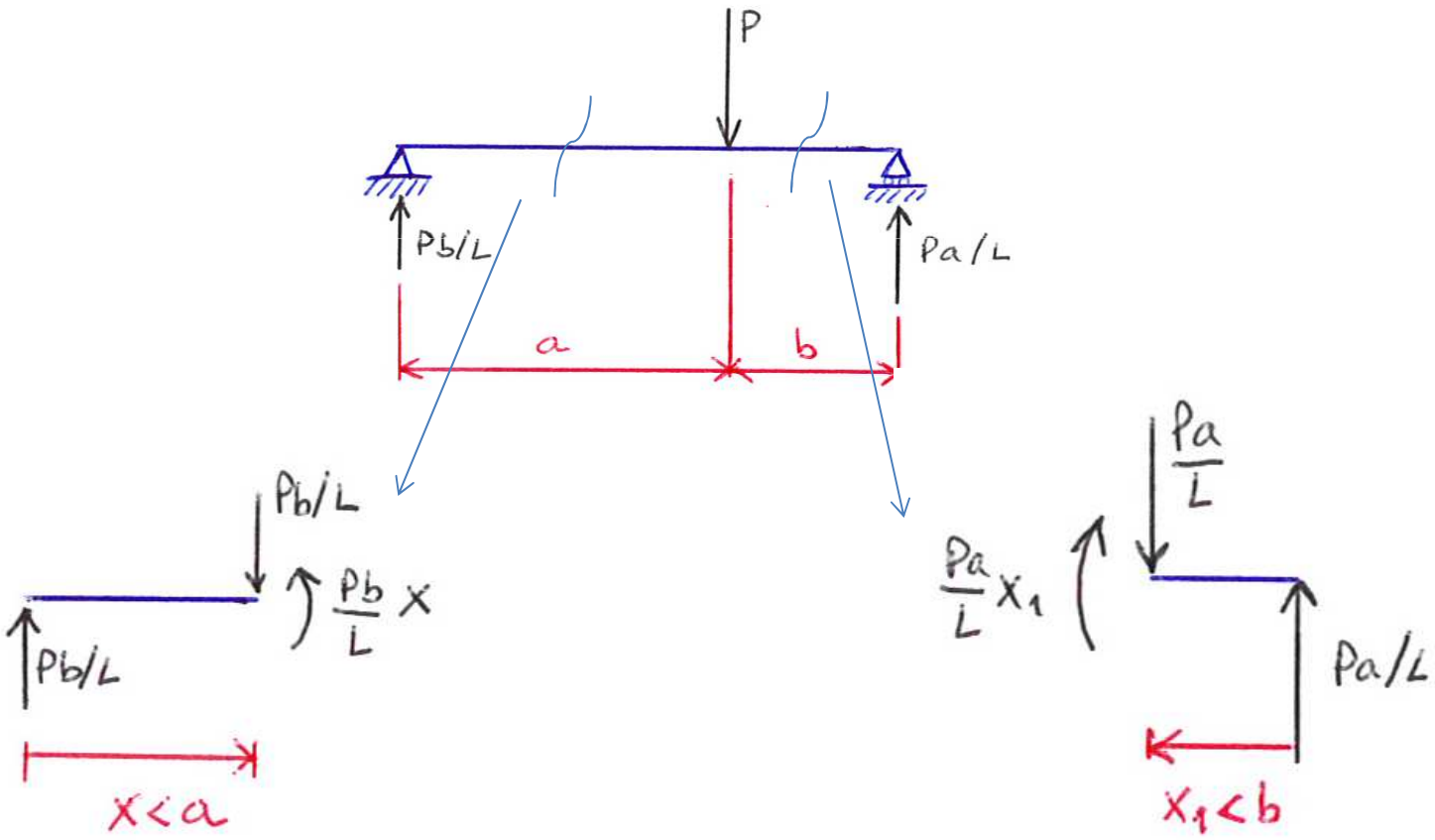
$$\begin{cases} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M}_P = 0 \end{cases}$$

Considere-se a viga simplesmente apoiada representada na figura seguinte:



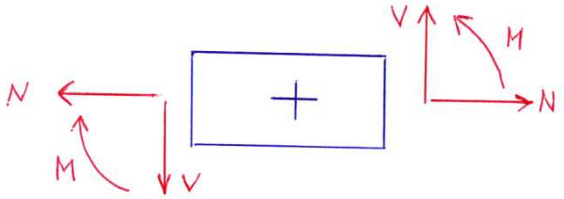
## Diagramas de esforços

Os diagramas de esforços são simplesmente representações gráficas das forças e momentos que têm de estar aplicados numa secção de uma viga de forma a equilibrar as forças e momentos exteriores:



## Diagramas de esforços

Convenção de esforços positivos:



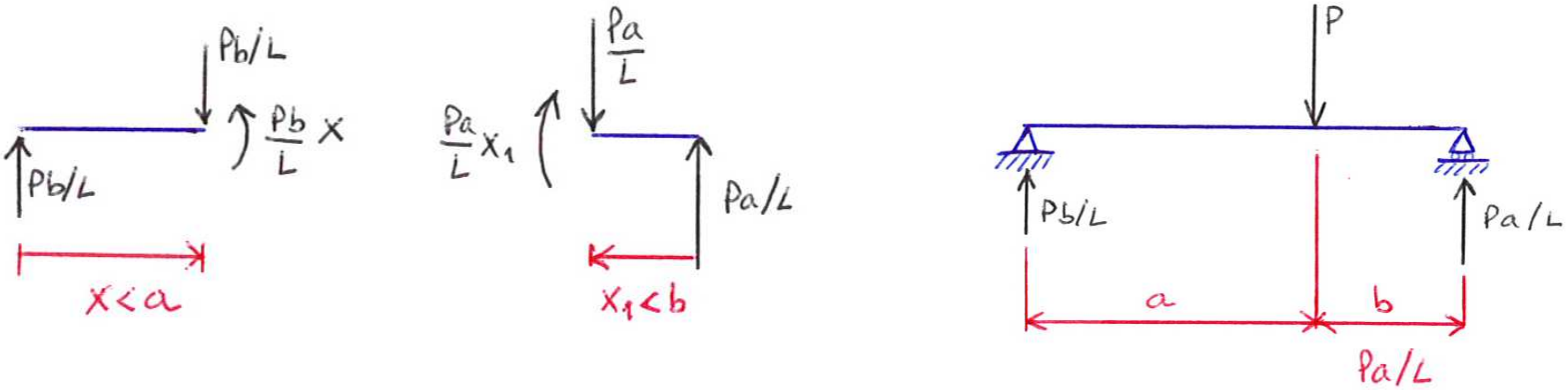




Diagrama de esforços transversos =VV=

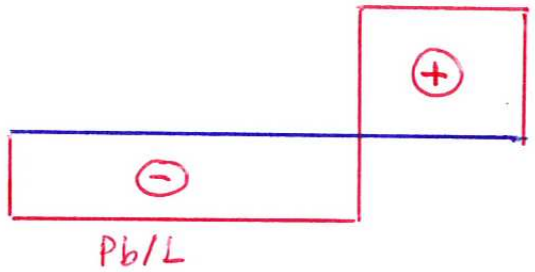
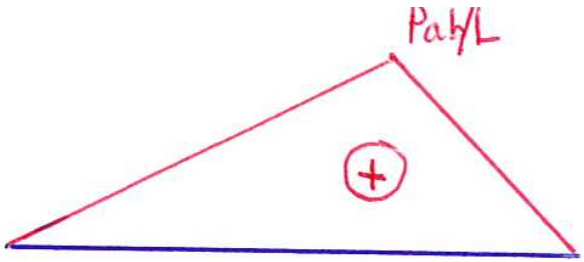
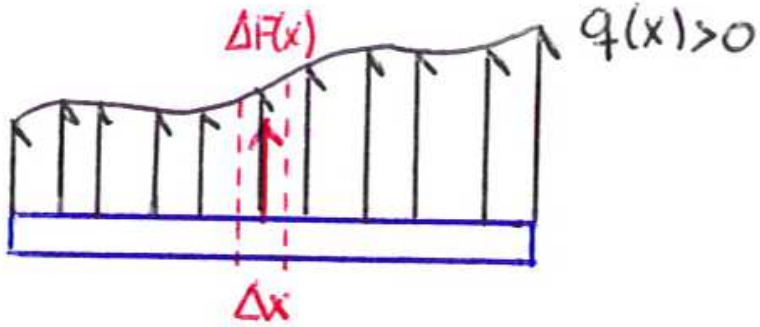



Diagrama de momentos flectores =MM$_F$=

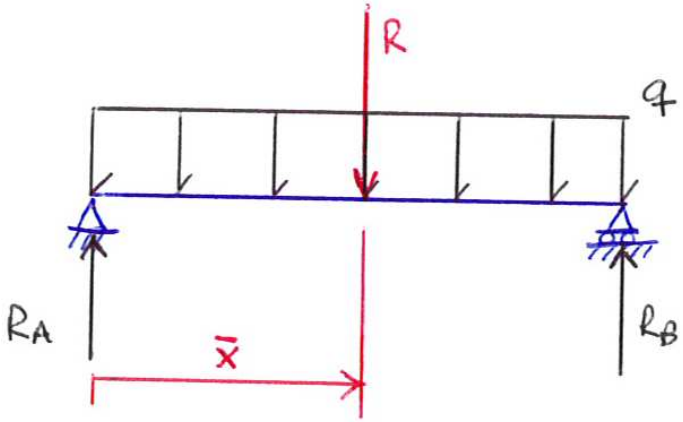


## Diagramas de esforços

Cargas distribuídas




$$q(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta F(x)}{\Delta x}$$

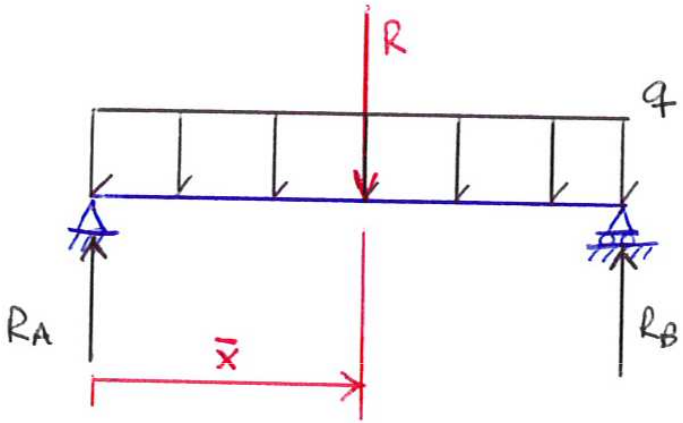



$$\Sigma F_y = -\int_0^L q(x)dx + R_A + R_B = 0$$

$$\Sigma M_A = -\int_0^L q(x)xdx + R_B L = 0$$

## Diagramas de esforços

Utilizando a resultante da carga distribuída, *R*:




$$\Sigma F_y = -R + R_A + R_B = 0$$

$$\Sigma M_A = -R\bar{x} + R_B L = 0$$

Comparando com as equações anteriores: $\bar{x} = \dfrac{\int_0^L q(x)x\,dx}{R} = \dfrac{\int_0^L q(x)x\,dx}{\int_0^L q(x)\,dx}$

Donde se conclui que a força resultante de uma carga distribuída é igual à área do respectivo diagrama de carga e que a força resultante de uma carga distribuída passa pelo centro de gravidade do diagrama de carga.

## Diagramas de esforços

Considerando um elemento de viga:




Aplicando as equações de equilíbrio:

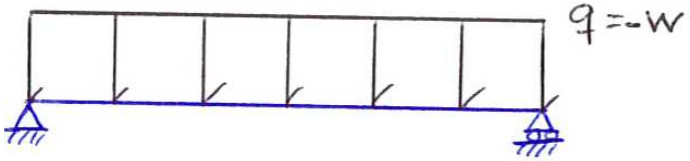
$$\begin{cases} \Sigma F_y = V + \dfrac{\partial V}{\partial x}dx + q(x)dx - V = 0 \\ \Sigma M_O = \left(M + \dfrac{\partial M}{\partial x}dx\right) + \left(V + \dfrac{\partial V}{\partial x}dx\right)\dfrac{dx}{2} - M + V\dfrac{dx}{2} = 0 \end{cases}$$

Desprezando termos infinitésimais de segunda ordem:

$$\begin{cases} \dfrac{dV}{dx} = -q(x) \\ \dfrac{dM}{dx} = -V(x) \end{cases}$$

## Diagramas de esforços

Exemplo:




$$\frac{dV}{dx} = -q(x) = W \Rightarrow V(x) = Wx + C_1$$

$$\frac{dM}{dx} = -V(x) = -Wx - C_1 \Rightarrow M(x) = -W\frac{x^2}{2} - C_1 x + C_2$$

Condições fronteira:

$$\begin{cases} x = 0 \Rightarrow M = 0 \\ x = L \Rightarrow M = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = -\dfrac{WL}{2} \\ C_2 = 0 \end{cases}$$

## Diagramas de esforços

Resulta então:

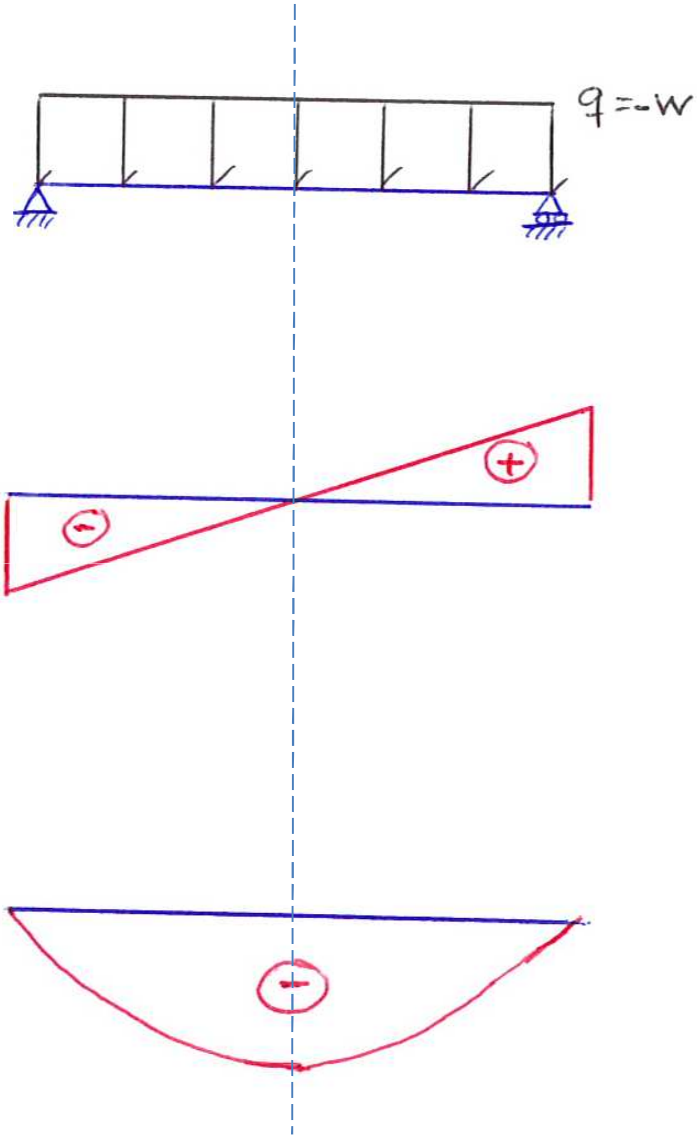



Diagrama de esforços transversos =VV=

$$V(x) = W\left(x - \frac{L}{2}\right)$$

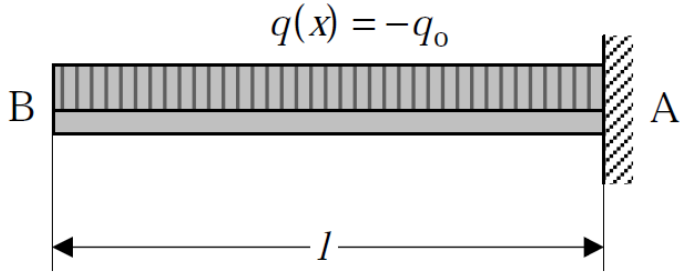
Diagrama de momentos flectores =$MM_F$=

$$M(x) = \frac{Wx}{2}(L - x)$$

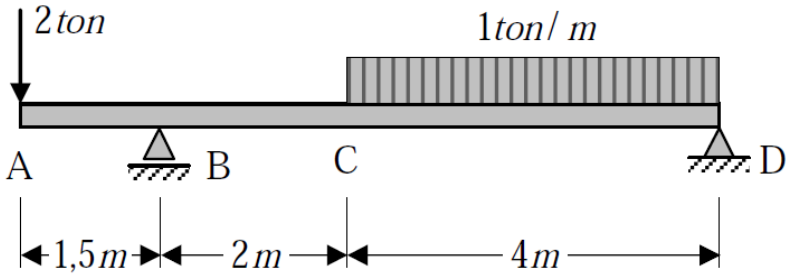
*Exercícios*

Represente os diagramas de esforços transversos e de momentos flectores para as vigas seguintes

**(do exercício 6.2.2)**

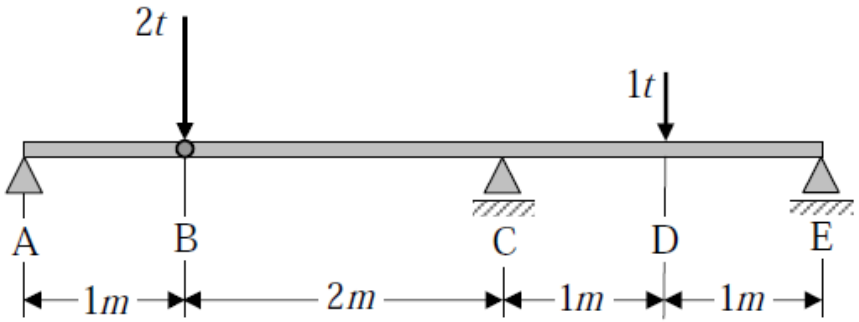



**(do exercício 6.2.4)**



*Exercícios*

**(do exercício 5.2.6)**




Construção interactiva de diagramas de esforços:

http://www.nexote.net/nexote/ShearandMoment/

# Aula #12

## Sumário:

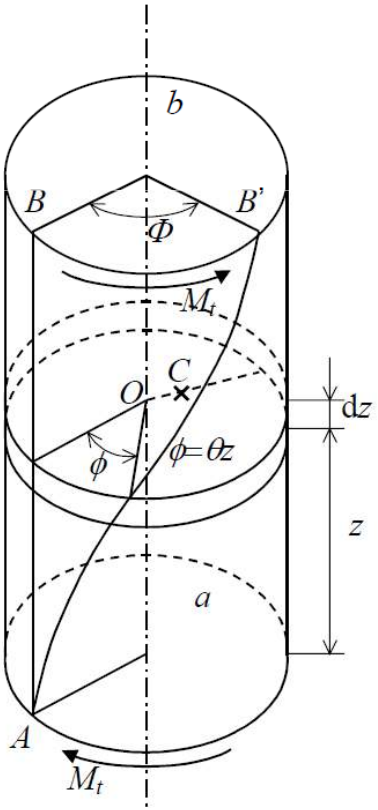
- Introdução à torção de peças lineares.
- Veio cilíndrico de secção circular.
- Veio circular oco.
- Problemas 4.2.1, 4.2.2 e 4.2.3

## Introdução

Absorção ou transmissão de esforços de torção:

- Veios ou árvores de transmissão
- Barras de torção; molas; estruturas tubulares (veículos de transporte e aeronaves).

## Veio cilíndrico de secção circular




Secções rectas do cilindro permanecem circulares e planas, após a deformação, rodando em torno do respectivo centro.

Um raio qualquer traçado sobre uma secção recta permanece rectilíneo durante a deformação do veio.

O ângulo entre dois quaisquer raios no plano duma secção recta permanece constante durante a deformação do veio.

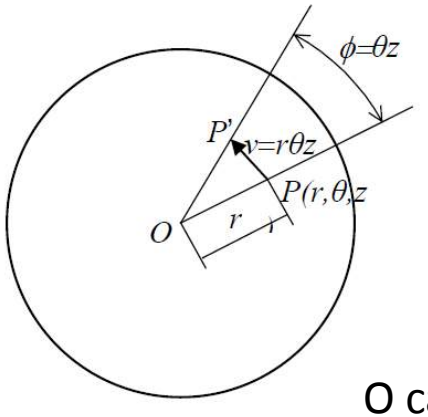
Portanto, e em consequência das condições da simetria geométrica e da solicitação, cada secção recta do veio roda em torno do respectivo centro como um disco absolutamente rígido. O ângulo de rotação θ é proporcional à distância z.

## Veio cilíndrico de secção circular

$$\phi = \theta z$$

Ângulo de rotação por unidade de comprimento

As condições anteriores implicam que as componentes longitudinais e radiais do campo de deslocamentos sejam nulas: $u_z = u_r = 0$

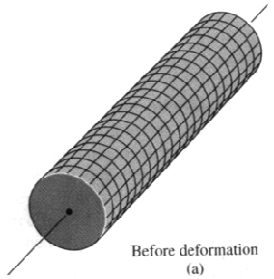


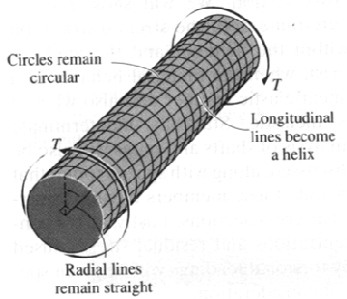

Para valores muito pequenos do ângulo de rotação, o deslocamento segundo θ é dado por:

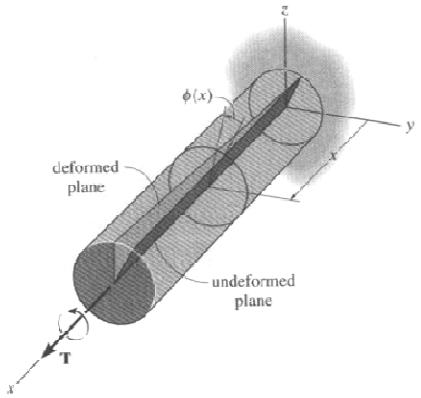
$$u_\theta = r\theta z$$

O campo de deslocamentos é então:

$$\{u\} = \{0, r\theta z, 0\}^T$$



## Veio cilíndrico de secção circular

O campo de deformações é obtido por derivação do campo de deslocamentos em coordenadas cilíndricas (ver aula #18):

$$\varepsilon_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}$$

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\gamma_{r\theta} = \gamma_{\theta r} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{\theta z} = \gamma_{z\theta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial (r\theta)} = \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \theta}$$

$$\gamma_{rz} = \gamma_{zr} = \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r}$$

O único termo não nulo das equações anteriores é:

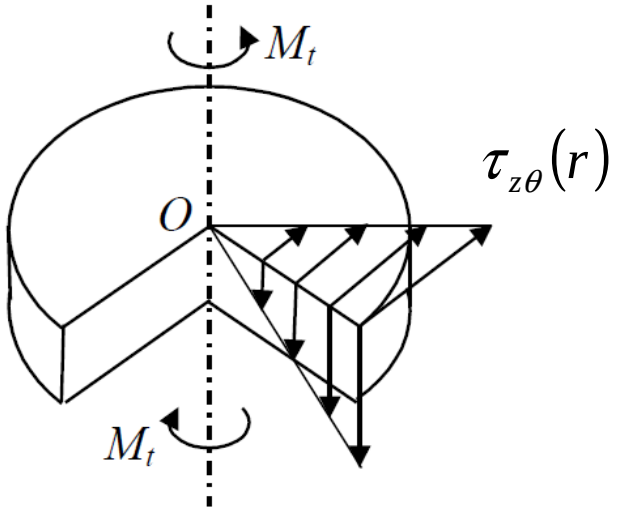
$$\gamma_{z\theta} = r\theta$$

## Veio cilíndrico de secção circular

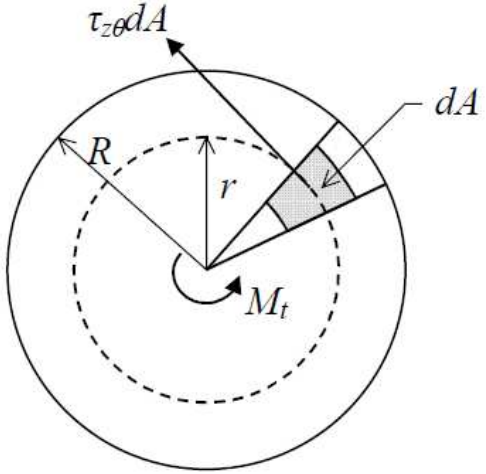
Aplicando a lei de Hooke:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = \tau_{r\theta} = \tau_{rz} = 0$$

$$\tau_{z\theta} = G\gamma_{z\theta} = Gr\theta$$




A relação entre o momento torsor aplicado ao veio é a distribuição de tensões de corte numa secção é obtida a partir de uma equação de equilíbrio:




$$\int_A r\tau_{z\theta}dA = M_t \Rightarrow \int_0^{2\pi}\int_0^R r\tau_{z\theta}rd\theta dr = M_t$$

Resulta então: $M_t = G\theta\int_A r^2 dA = G\theta I_Z$

Momento polar de inércia da secção recta do veio.

$$I_Z = \int_0^{2\pi}\int_0^R r^2 r dr d\theta = \frac{\pi R^4}{2}$$

## Veio cilíndrico de secção circular

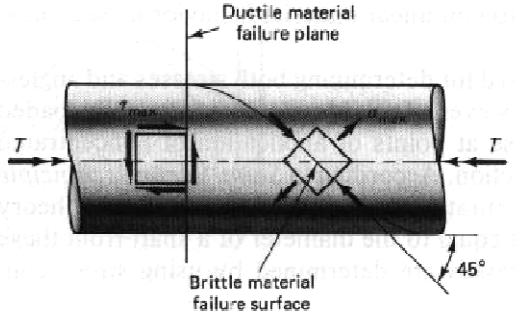
Das equações anteriores resulta:

$$\tau_{z\theta} = \frac{M_t r}{I_z}$$

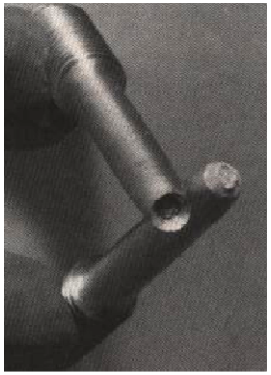
A tensão de corte máxima ocorre na periferia do veio, para r = R: $\tau_{max} = \frac{M_t R}{I_z} = \frac{2M_t}{\pi R^3}$

Rigidez torsional do veio: $C = M_t / \theta = GI_z$

Módulo de torção: $K = I_z / R = \pi R^3 / 2$




Rotura dúctil



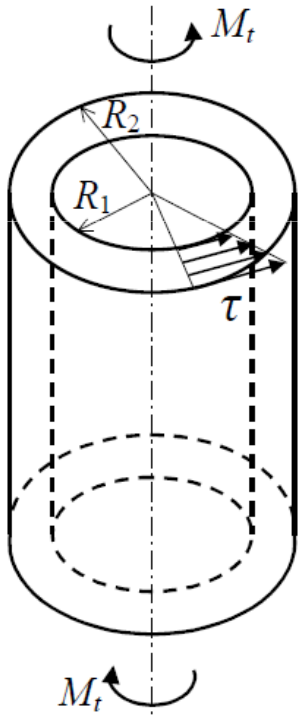
Rotura frágil



## Veio circular oco

Os argumentos e os resultados que foram obtidos para o veio maciço mantêm-se válidos, com excepção da expressão para o momento de inércia polar da secção, $I_z$, que neste caso toma a seguinte forma:

$$I_z = \frac{\pi(R_2^4 - R_1^4)}{2} = \frac{\pi R_2^4}{2}(1 - m^4) \qquad m = \frac{R_1}{R_2}$$




No caso particular dum tubo de parede fina, de espessura *e*:

$$e = R_2\text{-}R_1 << R_2 \qquad R_2^4 - R_1^4 = (R_2^2 + R_1^2)(R_2 + R_1)(R_2 - R_1) \cong R_m^3 e$$

$R_m=(R_1+R_2)/2$ : raio médio da secção.

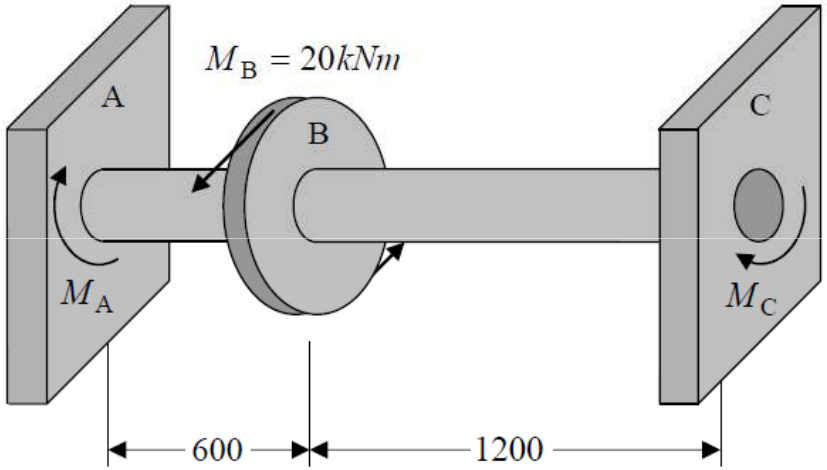
$$I_z \cong 2\pi R_m^3 e \cong R_m^2 \Omega \quad \text{, com:} \quad \Omega = 2\pi R_m e$$

Resulta então:

$$\tau \cong \frac{M_t R_m}{I_z} \cong \frac{M_t}{R_m \Omega} \qquad \theta = \frac{M_t}{G I_z} \cong \frac{M_t}{G R_m^2 \Omega} \cong \frac{\tau}{G R_m}$$

*Exercícios*

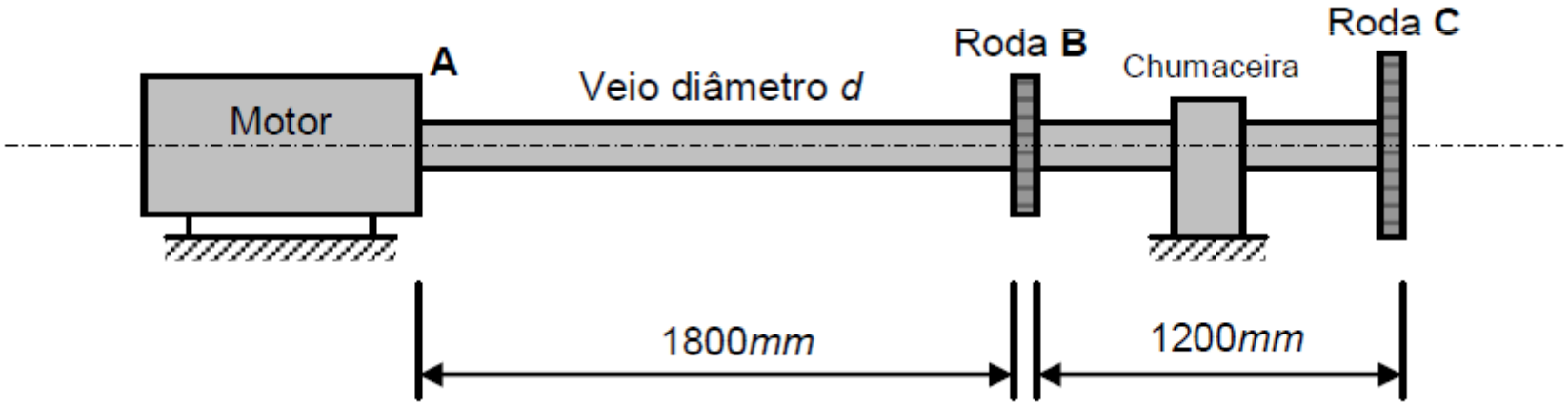
**4.2.1** Um veio em liga de alumínio (G=27GPa) está encastrado nas extremidades A e C em duas paredes fixas, sendo solicitada por um momento $M_t$=20kNm, aplicado numa secção intermédia B, conforme indicado na figura.




Calcule o diâmetro que o veio deverá ter, sabendo que a tensão de corte máxima admissível para o material é $\tau_{adm}$=60 MPa e que o ângulo de torção por unidade de comprimento não deve exceder 1º/m.

*Exercícios*

**4.2.2** Um motor desenvolve uma potência de 200 kW às 250 rpm sobre a secção A de um veio de secção circular, conforme ilustrado na figura. As rodas dentadas em B e C absorvem 90 kW e 110 kW, respectivamente. Calcule o diâmetro que o veio deverá ter, supondo que a tensão admissível do material ao corte é de 50MPa e que o ângulo de torção entre o motor e a roda dentada C está limitado a um valor de 1.5º. Considere que o módulo de rigidez do material do veio é G=80GPa.



*Exercícios*

**4.2.3** Um veio de secção circular composta é construído a partir de uma barra de aço (G=80 GPa) com 75 mm de diâmetro, revestida por um tubo de latão (G=40GPa) perfeitamente acoplado.

a) Determine o diâmetro exterior do tubo, de tal modo que, quando for aplicado um momento torsor ao veio composto, esse momento seja igualmente repartido pelos dois materiais.

b) Para um momento torsor aplicado de 16 kNm, calcule a tensão de corte máxima em cada um dos materiais e o ângulo de torção do veio num comprimento de 4 metros.

c) Para o valor do momento torsor considerado em b), calcule a energia elástica de deformação por metro de comprimento do veio.

# Aula #13

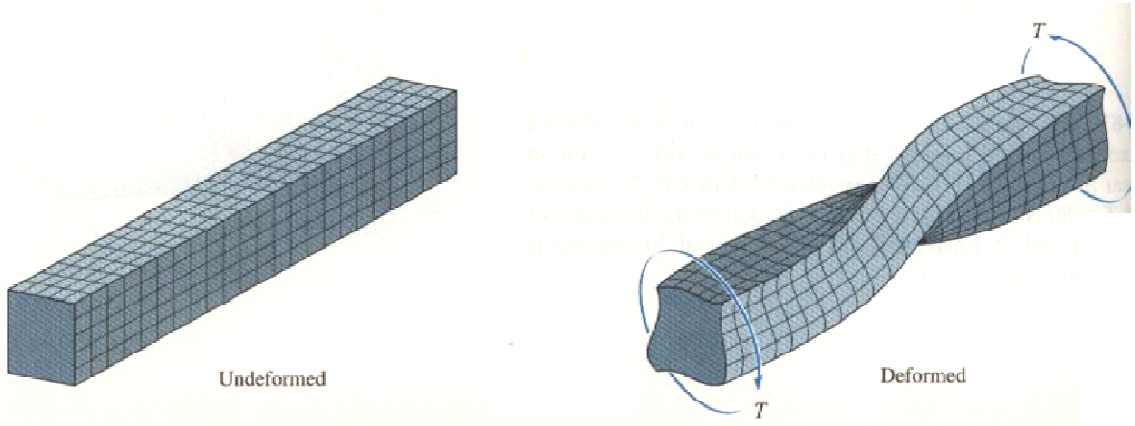
## Sumário:

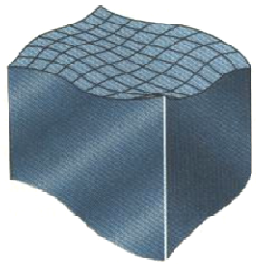
- Torção de veios prismáticos de secção arbitrária.
- Teoria de Saint-Venant.
- Aplicação a veios de secção elíptica.
- Problema 4.2.6.

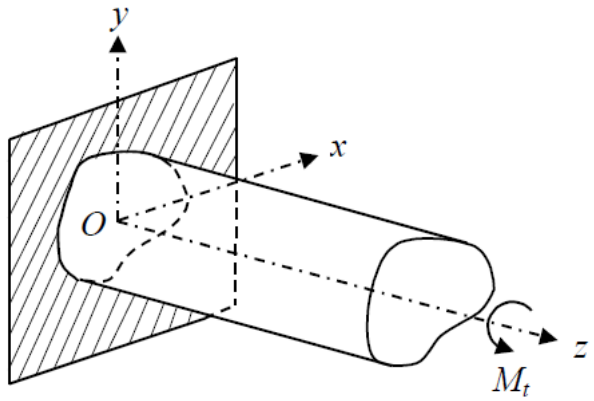
## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

Na ausência de simetria circular, deixa de ser válida a condição de que as secções rectas se mantêm planas havendo, neste caso, um deslocamento axial dos pontos de cada secção.





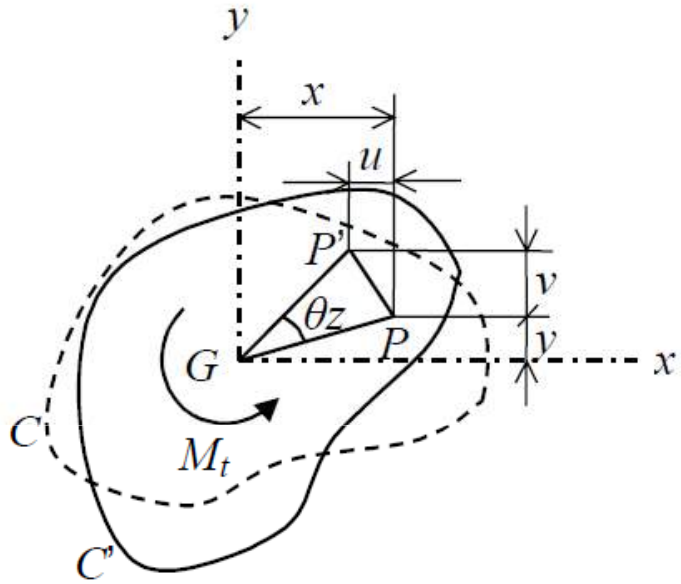

Hipóteses de Saint-Venant:

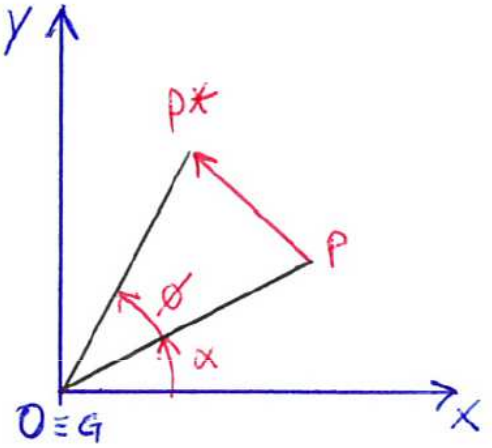
$$w = w(x, y)$$

$$\phi = \theta\, z$$

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*




$$\overrightarrow{GP}=\begin{Bmatrix} a\cos\alpha \\ a\sin\alpha \\ z_P \end{Bmatrix};\quad \overrightarrow{GP^*}=\begin{Bmatrix} a\cos(\alpha+\phi) \\ a\sin(\alpha+\phi) \\ z_{P*} \end{Bmatrix} \therefore \vec{u}=\overrightarrow{GP^*}-\overrightarrow{GP}=\begin{Bmatrix} a\cos(\alpha+\phi)-a\cos\alpha \\ a\sin(\alpha+\phi)-a\sin\alpha \\ w(x,y) \end{Bmatrix}$$

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

$$u = a\cos(\alpha+\phi) - a\cos\alpha = a(\cos\alpha\cos\phi - \sin\alpha\sin\phi) - a\cos\alpha$$

Quando $\phi \to 0$: $u \approx -a\sin\alpha\phi = -y\phi = -yz\theta$

$$v = a(\sin\alpha\cos\phi + \cos\alpha\sin\phi) - a\sin\alpha$$

Quando $\phi \to 0$: $v \approx a\cos\alpha\phi = x\phi = xz\theta$

O campo de deslocamentos é então dado por:

$$\vec{u}(x,y,z) = \begin{Bmatrix} -\theta zy \\ \theta zx \\ w(x,y) \end{Bmatrix}$$

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

Das relações entre o campo de deformações e o campo de deslocamentos resulta:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_{zz} = \gamma_{xy} = 0$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta\, y + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \theta\, x + \frac{\partial w}{\partial y}$$

Aplicando a lei de Hooke:

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{zz} = \tau_{xy} = 0$$

$$\tau_{xz} = G(-\theta\, y + \frac{\partial w}{\partial x})$$

$$\tau_{yz} = G(\theta\, x + \frac{\partial w}{\partial y})$$

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

Aplicando as equações de equilíbrio na ausência de forças de volume e forças de inércia:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0$$

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

Aplicando as equações de compatibilidade:

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} \quad \checkmark$$

$$\frac{\partial^2 \gamma_{xz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} \quad \checkmark$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x}\right)$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{yx}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = f(y)$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = g(x)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = C^{te}}$$

$$2\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{zy}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z}\right) \quad \checkmark$$

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

$$-\theta\, y + \frac{\partial w}{\partial x}$$

$$\theta\, x + \frac{\partial w}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = C^{te}$$

Calculando as derivadas parciais, resulta:

$$\frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = -\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x}$$

(*w* é uma função contínua)

$$\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{xz}}{\partial y} = 2\theta$$

Aplicando a lei de Hooke

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2G\theta$$

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

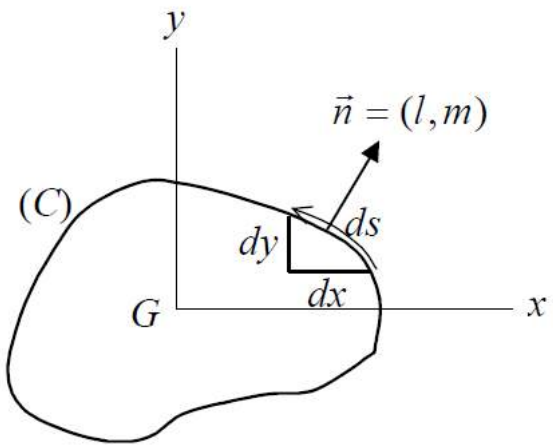
O problema da torção fica então reduzido à resolução dum sistema de duas equações de derivadas parciais nas funções $\tau_{xz}$ e $\tau_{yz}$ :

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Equação de equilíbrio.}$$

$$\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial y} = 2G\theta \quad \Rightarrow \quad \text{Equação de compatibilidade.}$$

Condição fronteria:

$$\{T\} = [\sigma]\{n\} = \{0\} \text{ em C} \Rightarrow \tau_{xz} l + \tau_{yz} m = 0 \text{ em C}$$



## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

Definindo a seguinte função de tensão de Saint-Venant $\Phi(x,y)$, função contínua, de tal forma que as componentes Cartesianas do tensor das tensões são dados por:

$$\begin{cases} \tau_{xz} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ \tau_{yz} = -\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \end{cases}$$

Verifica-se que a equação de equilíbrio é automaticamente satisfeita. Substituindo as tensões anteriores na equação de compatibilidade resulta:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta$$

A condição fronteira vem:

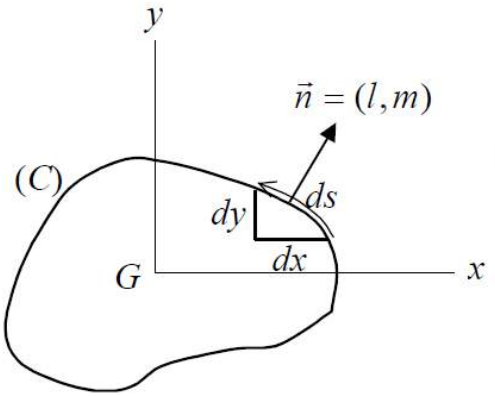
$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} l - \frac{\partial \Phi}{\partial x} m = 0 \quad \text{em C}$$

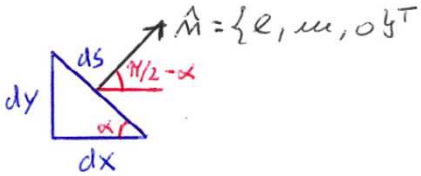
Equações que governam o problema de torção

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

Tendo em conta que $\frac{dx}{ds} = -m$ e que $\frac{dy}{ds} = l$ :




$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{ds} = \frac{d\Phi}{ds} = 0 \quad \text{em C}$$

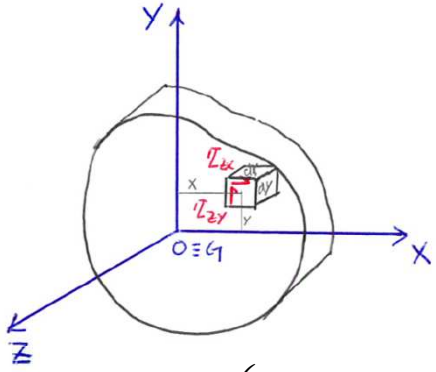
Esta equação traduz que o valor da função $\Phi$ se mantém constante ao longo da linha de contorno da secção recta do veio. Por outro lado, uma vez que no cálculo das tensões de torção apenas intervêm as derivadas da função $\Phi$, o valor constante dessa função na periferia do veio pode ser tomado igual a zero. Donde a condição fronteira em termos de $\Phi$:

$$\Phi = 0 \quad \text{em C}$$

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

O momento torsor é calculado a partir de uma equação de equilíbrio:




$$dM_t = \left(x\tau_{yz} - y\tau_{xz}\right)dx\,dy$$

$$M_t = \int_A \left(x\tau_{yz} - y\tau_{xz}\right)dx\,dy = -\int_A \left( x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + y\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)dx\,dy = -\int_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y\Phi)\right]dx\,dy + 2\int_A \Phi dxdy$$

Aplicando o Teorema de Green $\left(\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy = \oint_C Pdx + Qdy\right)$:

$$M_t = -\int_C (x\Phi dy - y\Phi dx) + 2\int_A \Phi dxdy$$

Dado que $\Phi = 0$ em C:

$$\boxed{M_t = 2\int_A \Phi(x,y)dxdy}$$

## Veio prismático de secção arbitrária

*Teoria de Saint-Venant*

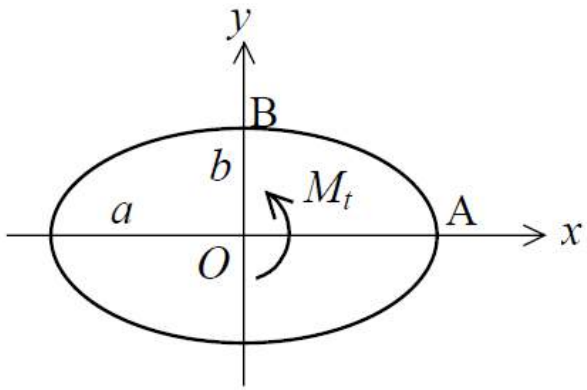
O problema resume-se então à definição de uma função de tensão $\Phi$ (x,y) de tal forma que $\Phi$(x,y)=0 em C e que satisfaça a equação de compatibilidade. Nestas condições as tensões e o momento torsor são dados por:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$$

$$\tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

$$M_t = 2\int_A \Phi(x,y)dxdy$$

## Aplicação a veios de secção elíptica




Considere-se uma secção elíptica com os semi-eixos maior e menor iguais a *a* e *b*, respectivamente. O contorno elíptico da secção é definido pela seguinte equação:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

Qualquer função de tensão do tipo $\Phi = m\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1\right)$, onde m é uma constante satisfaz a condição fronteira $\Phi = 0$ em C.

Substituindo na equação de compatibilidade, $\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=-2G\theta$

$$2m\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)=-2G\theta \quad \Rightarrow \quad m=-\frac{G\theta\, a^2b^2}{a^2+b^2}$$

## Aplicação a veios de secção elíptica

A função de tensão é então:

$$\Phi = \frac{G\theta\, a^2 b^2}{a^2 + b^2}\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)$$

Momento torsor:

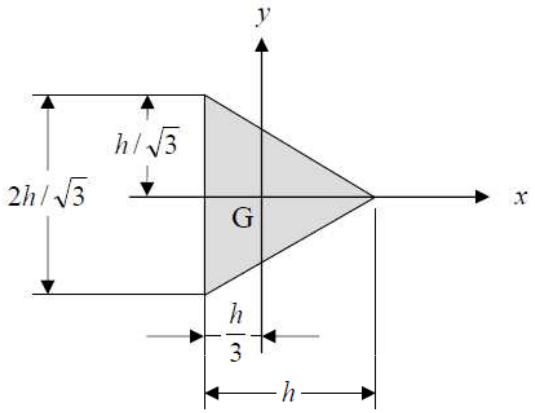
$$M_t = 2\int_A \Phi(x,y)\,dxdy \Rightarrow M_t = 2\frac{G\theta\, a^2 b^2}{a^2 + b^2}\int_A (1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2})dxdy = \frac{\pi\, G\theta\, a^3 b^3}{a^2 + b^2}$$

Tensões:

$$\tau_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = -\frac{2G\theta\, a^2 y}{a^2 + b^2} = -\frac{2M_t y}{\pi a b^3} \qquad \tau_{yz} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{2G\theta\, b^2 x}{a^2 + b^2} = \frac{2M_t x}{\pi a^3 b}$$

*Exercícios*

**4.2.6** A solução do problema relativo à torção dum veio de secção triangular equilátera (ver figura) pode obter-se a partir da seguinte função de tensão de Saint-Venant:




$$\Phi = K\left(x-\sqrt{3}y-\frac{2}{3}h\right)\left(x+\sqrt{3}y-\frac{2}{3}h\right)\left(x+\frac{1}{3}h\right)$$

a) Determine a constante K, em termos de G e θ, e mostre que o momento torsor é dado pela expressão:

$$M_t = \frac{G\theta h^4}{15\sqrt{3}}$$

b) Calcule o campo de tensões na secção do veio.

c) Calcule o ângulo de torção por unidade de comprimento.

# Aula #14

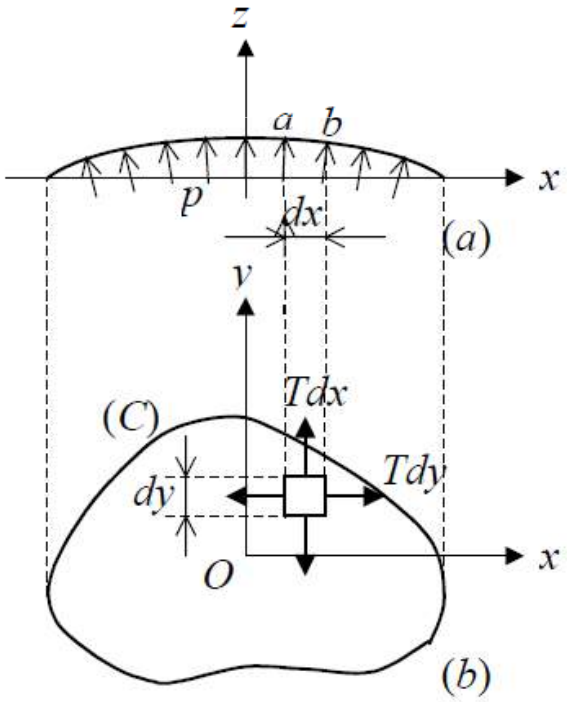
## Sumário:

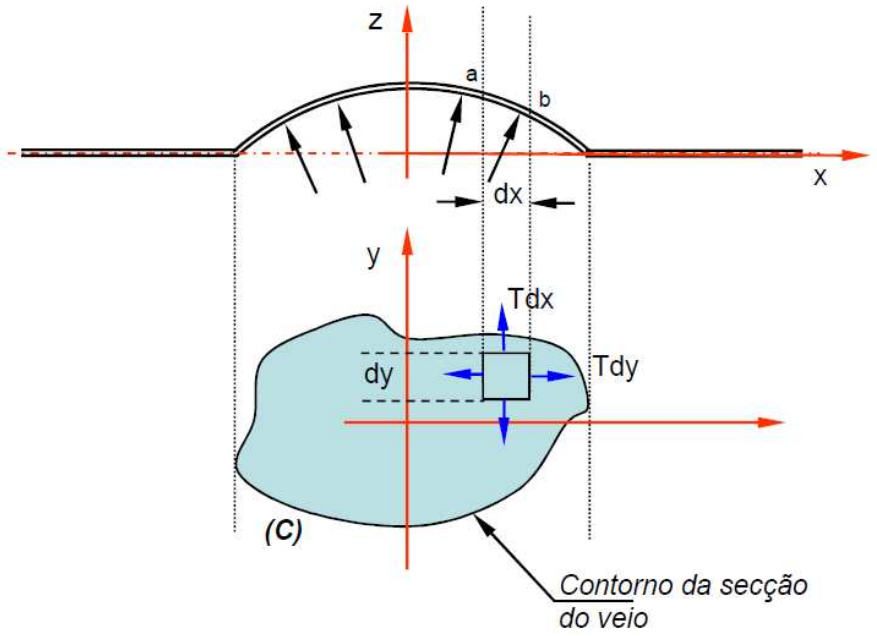
- Analogia de membrana – teoria de Prandtl.
- Aplicação a veios de secção circular.
- Aplicação a veios de secção rectangular fina.
- Aplicação a veios de secção tubular de parede fina e secção multicelular.
- Problemas 4.2.9, 4.2.11 e 4.2.12

**Analogia de membrana.**

*Teoria de Prandtl*

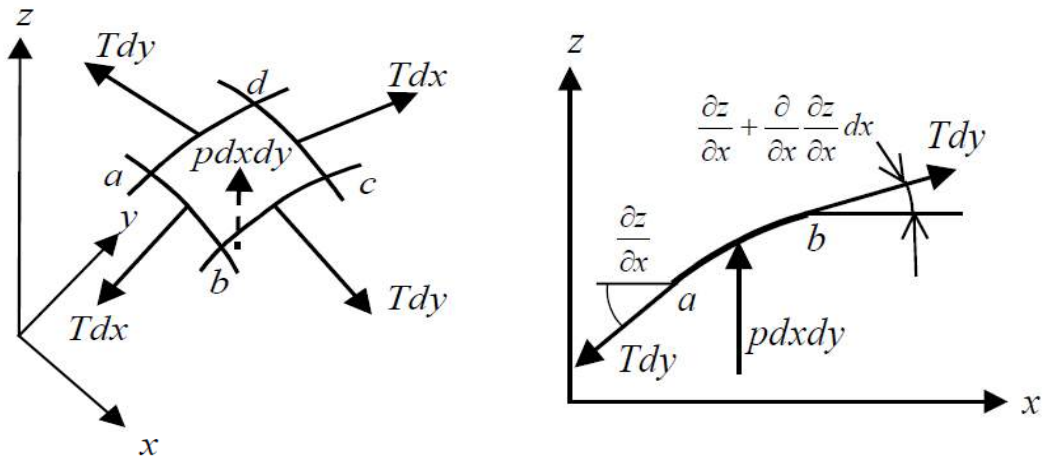
Considere-se uma membrana elástica fina, sem peso, plana e inicialmente sujeita a uma tracção uniforme, **T**, no plano (x,y). Fixando a membrana ao longo dum contorno (C), aplique-se uma pressão, p, também uniforme, na direcção perpendicular à superfície da membrana. Esta deforma-se, assumindo a forma duma superfície curva, que pode ser descrita por uma função apropriada, z=f(x,y).



**Analogia de membrana.**

*Teoria de Prandtl*




Equação de equilíbrio segundo 0-z:

$$pdxdy + Tdy(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial x}dx) - Tdy(\frac{\partial z}{\partial x}) + Tdx(\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial z}{\partial y}dy) - Tdx(\frac{\partial z}{\partial y}) = 0$$

$$pdxdy + T\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dxdy + T\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dxdy = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{p}{T}$$

**Analogia de membrana.**

*Teoria de Prandtl*

Equação de equilíbrio da membrana:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-\frac{p}{T}$$

Função de tensão de Saint-Venant:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2}=-2G\theta$$

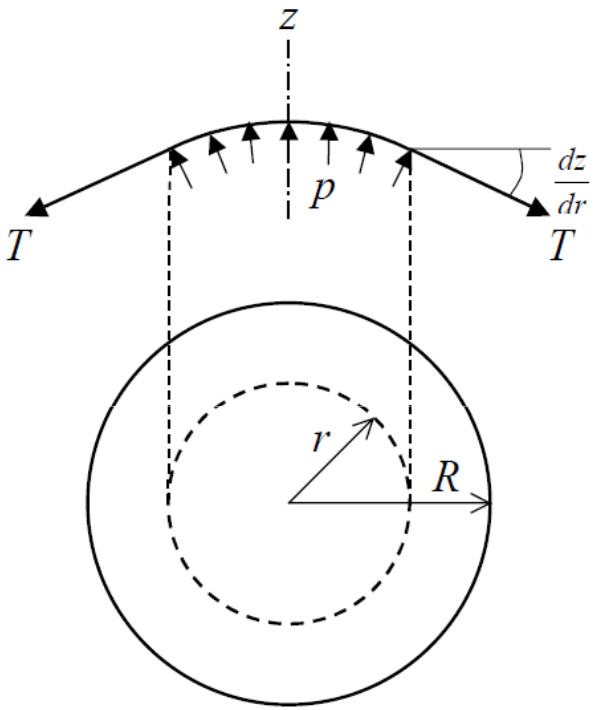
$$\frac{p}{T} \Leftrightarrow 2G\theta$$

$$\tau \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$M_t \Leftrightarrow 2 \times Vol$$

**Analogia de membrana.**

*Secção circular*




Equação de equilíbrio da membrana:

$$p\pi r^2 - 2\pi r T\left(-\frac{dz}{dr}\right) = 0$$

$$-T\frac{dz}{dr}2\pi r = p\pi r^2 \Rightarrow \frac{dz}{dr} = -\frac{p}{2T}r$$

Aplicando a analogia de membrana:

$$\frac{p}{T} \Leftrightarrow 2G\theta$$

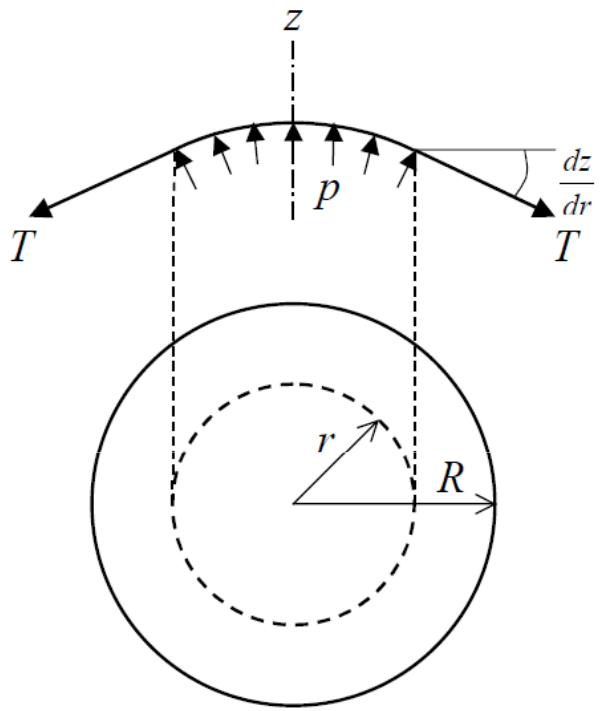
$$\tau \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$M_t \Leftrightarrow 2 \times Vol$$

$$\tau = G\theta r$$

## Analogia de membrana.

*Secção circular*




$$\frac{p}{T} \Leftrightarrow 2G\theta$$

$$\tau \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$M_t \Leftrightarrow 2 \times Vol$$

Integrando a equação anterior:

$$z = -\int \frac{pr}{2T} dr = -\frac{pr^2}{4T} + C^{te}$$

A constante de integração é calculada considerando que a coordenada z é nula ao longo da periferia da membrana (r=R), resultando:

$$\frac{pr^2}{4T} \Rightarrow z = \frac{p}{4T}(R^2 - r^2)$$

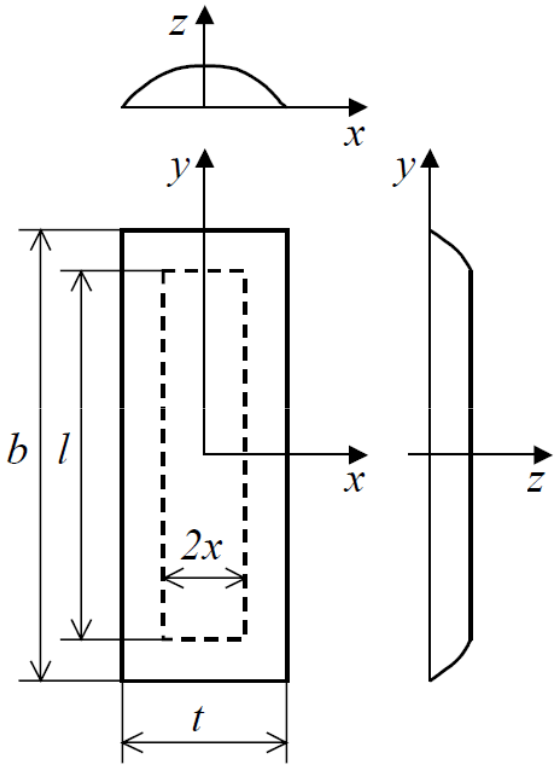
$$Vol = \int_0^R 2\pi r dr z = \frac{p\pi}{2T}\int_0^R (R^2 - r^2) r dr = \frac{\pi}{8}\frac{p}{T}R^4$$

Aplicando a analogia de membrana:

$$M_t = 2Vol = \frac{\pi}{2}R^4 G\theta = GI_z\theta \Rightarrow \frac{M_t}{\theta} = GI_z$$

**Analogia de membrana.**

*Secção rectangular*




Equação de equilíbrio da membrana:

$$-2T\,l\frac{dz}{dx} = p\,2x\,l$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{p}{T}x$$

Integrando a equação anterior:

$$z = -\frac{p}{T}\int x\,dx = -\frac{p\,x^2}{2T} + C^{te}$$

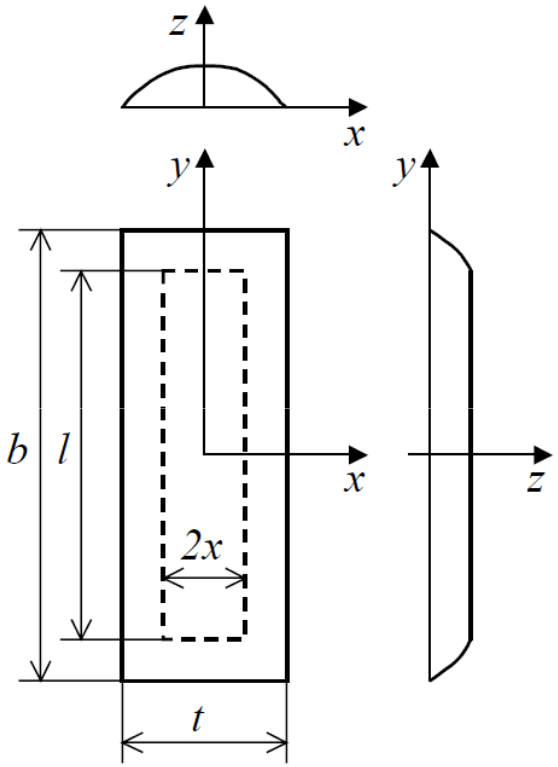
$$C^{te} = \frac{pt^2}{8T}$$

Resulta então:

$$z = \frac{p}{2T}\left(\frac{t^2}{4} - x^2\right)$$

## Analogia de membrana.

*Secção rectangular*




Aplicando a analogia de membrana:

$$\frac{p}{T} \Leftrightarrow 2G\theta$$

$$\tau \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$M_t \Leftrightarrow 2 \times Vol$$

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{p}{T}x$$

$$\tau = -(2G\theta)x$$

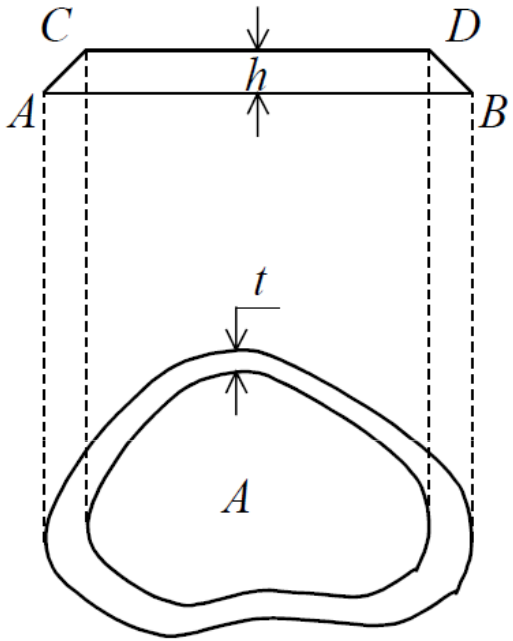
$$\tau_{\max} = -(2G\theta)\left(-\frac{t}{2}\right) = G\theta t$$

$$Vol = \frac{2}{3}t\left(\frac{p}{2T}\frac{t^2}{4}\right)b \Rightarrow C = \frac{M_t}{\theta} = G\frac{bt^3}{3}$$

$$\tau_{\max} = \frac{3M_t}{bt^2}$$

## Analogia de membrana.

*Secção tubular de parede fina*




$$Declive = \frac{h}{t}$$ ⇒ A tensão de corte é inversamente proporcional à espessura local da parede.

$$Vol = A \times h = A\frac{h}{t}t \Rightarrow M_t = 2\,A\,t\,\tau$$

Equação de equilíbrio da membrana:

$$\int_C T \sin\alpha dS = pA \Rightarrow \int_C T\frac{h}{t}dS = pA$$

Aplicando a analogia de membrana:

$$2G\theta = \frac{1}{A}\int_C \tau\, ds$$

$$\frac{p}{T} \Leftrightarrow 2G\theta$$

$$\tau \Leftrightarrow \frac{\partial z}{\partial n}$$

$$M_t \Leftrightarrow 2 \times Vol$$

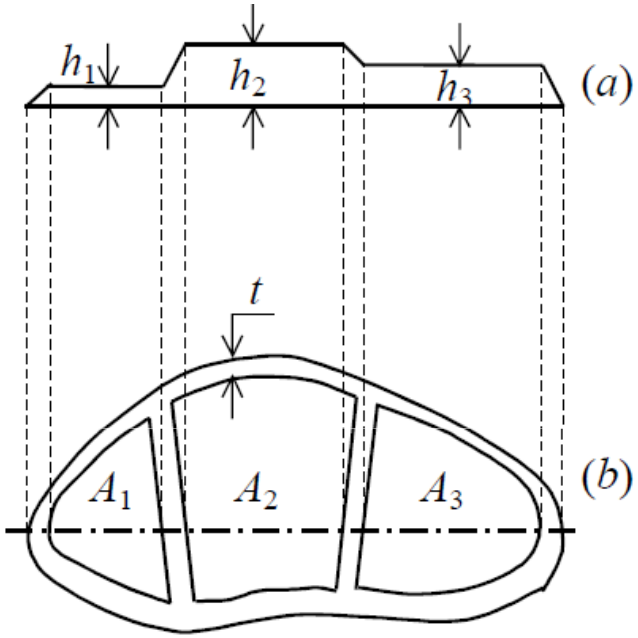
$$\theta = \frac{M_t}{4GA^2}\int_C \frac{ds}{t} \qquad C = \frac{M_t}{\theta} = \frac{4GA^2}{\int_C \frac{ds}{t}}$$

Para uma espessura constante: $C = \frac{M_t}{\theta} = \frac{4GA^2 t}{L}$

(L: perímetro)

**Analogia de membrana.**

*Secção multicelular*




Equação de equilíbrio da célula (i):

$$pA_i = T\int_{C_i} \frac{\Delta h_i}{t} ds$$

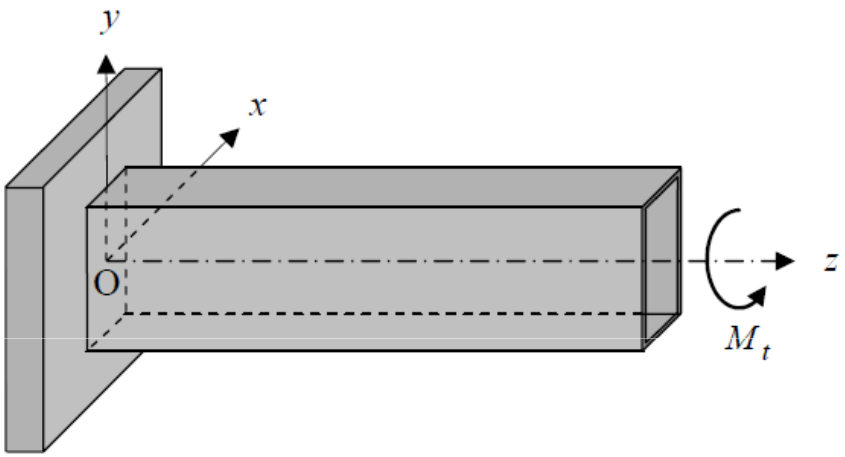
$$\tau = \frac{\Delta h}{t}$$

$$Vol = \sum_{i=1}^{n} A_i h_i$$

$$M_t = 2\sum_{i=1}^{n} A_i h_i$$

*Exercícios*

**4.2.9** Pretende-se construir um elemento tubular de secção rectangular (200x100mm$^2$) em aço (G=80GPa), para transmitir um momento torsor Mt=20kNxm.




Determine a espessura t que deverá ter o tubo, para que a tensão de corte não ultrapasse o valor admissível de $\tau_{adm}$=50Mpa e a rotação do veio seja inferior a 1º por metro.

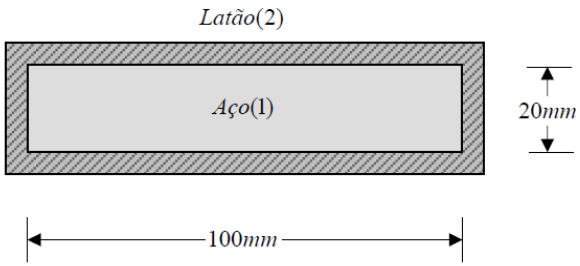
*Exercícios*

**4.2.11** Um veio de secção rectangular composta é construído a partir de uma barra de aço (Ga=80GPa) com as dimensões 100mmx20mm de lado, revestida por um tubo de latão (Gl=40GPa), de secção rectangular com uma espessura de parede de 5mm. A montagem é feita de tal modo a permitir um eventual deslizamento axial entre os dois elementos.

a) Adoptando a aproximação mais simples fazer os cálculos sobre a linha de contorno exterior do tubo de latão, em vez da linha média, calcule o valor máximo do momento torsor que pode ser transmitido pelo veio. Considere $(\tau_{adm})$aço=50MPa e $(\tau_{adm})$latão=20MPa.

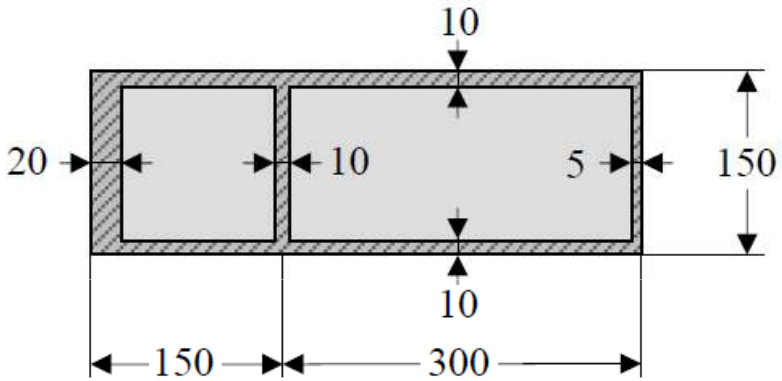
b) Para o valor do momento calculado na alínea a), determine o ângulo de torção por metro de comprimento.

c) Reconsidere agora as duas alíneas anteriores, fazendo os cálculos sobre a linha média da secção do tubo de latão.



*Exercícios*

**4.2.12** Considere um veio prismático de secção tubular multicelular, conforme indicada na figura. O módulo de rigidez do material é G=80GPa e a tensão admissível é $\tau_{adm}$=50MPa.



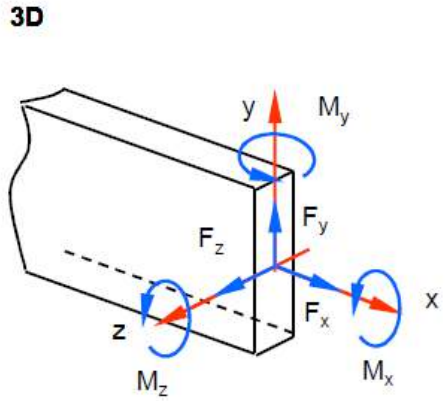

Determine o momento torsor máximo que o veio é capaz de transmitir e o respectivo ângulo de torção por metro de comprimento.

# Aula #15

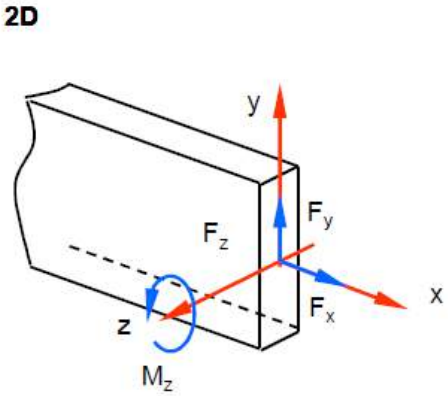
## Sumário:

- Flexão de vigas. Introdução. Tipos de solicitação de uma viga.
- Flexão pura de uma viga. Hipótese de Bernoulli.
- Problemas 5.2.1, 5.2.3 e 5.2.4.

## Introdução. Tipos de solicitação.



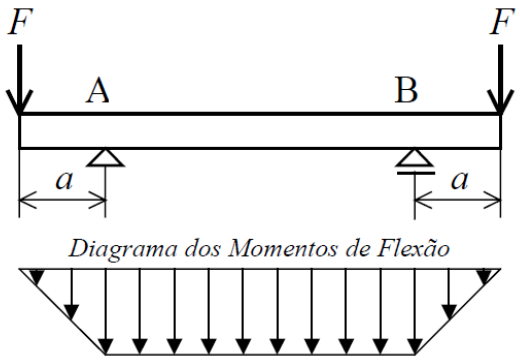

$F_x$ – *Esforço normal*
$F_y$ – *Esforço transverso (y)*
$F_z$ – *Esforço transverso (z)*
$M_x$ – *Momento torsor*
$M_y$ – *Momento Flector (y)*
$M_z$ - *Momento Flector (z)*




Os eixos 0y e 0z são eixos principais de inércia da secção.

### Flexão pura de uma viga

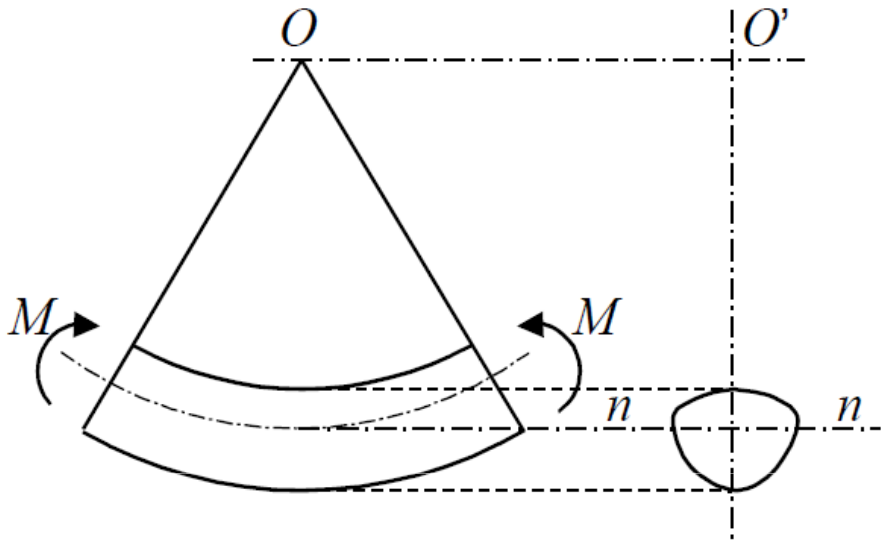
Solicitação única de momento flector constante. Entre as duas secções A e B o esforço transverso é nulo. O momento flector é constante e igual a Fa.




Adopta-se a convenção de que o momento flector é positivo sempre que provoca na viga uma concavidade voltada para cima.

Sendo constante o valor do momento de flexão, a deformação é a mesma em qualquer secção. Entre as secções A e B, o eixo da viga toma a forma de um arco de circunferência, com centro num ponto O do plano de solicitação.

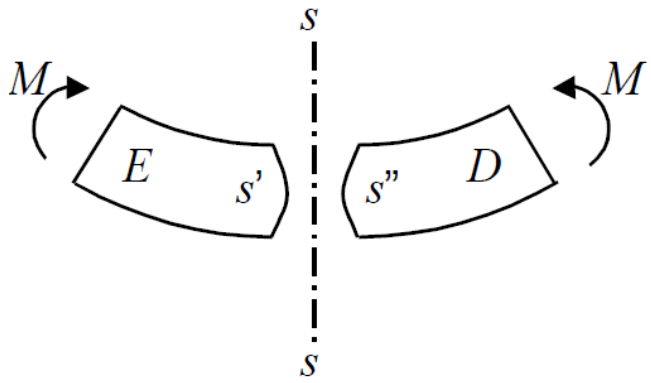
## Flexão pura de uma viga




As fibras longitudinais, inicialmente rectilíneas, acompanham a curvatura do eixo, assumindo a forma de arcos de circunferência paralelos entre si.

O momento flector tem resultante nula, pelo que as fibras não podem ficar todas à tracção ou todas à compressão – superfície neutra da viga e eixo neutro (n-n) da secção recta.

O eixo neutro divide a secção em duas partes: uma em tração ($\sigma > 0$) e outra em compressão ($\sigma < 0$). Sobre o eixo neutro a tensão normal é nula ($\sigma = 0$).

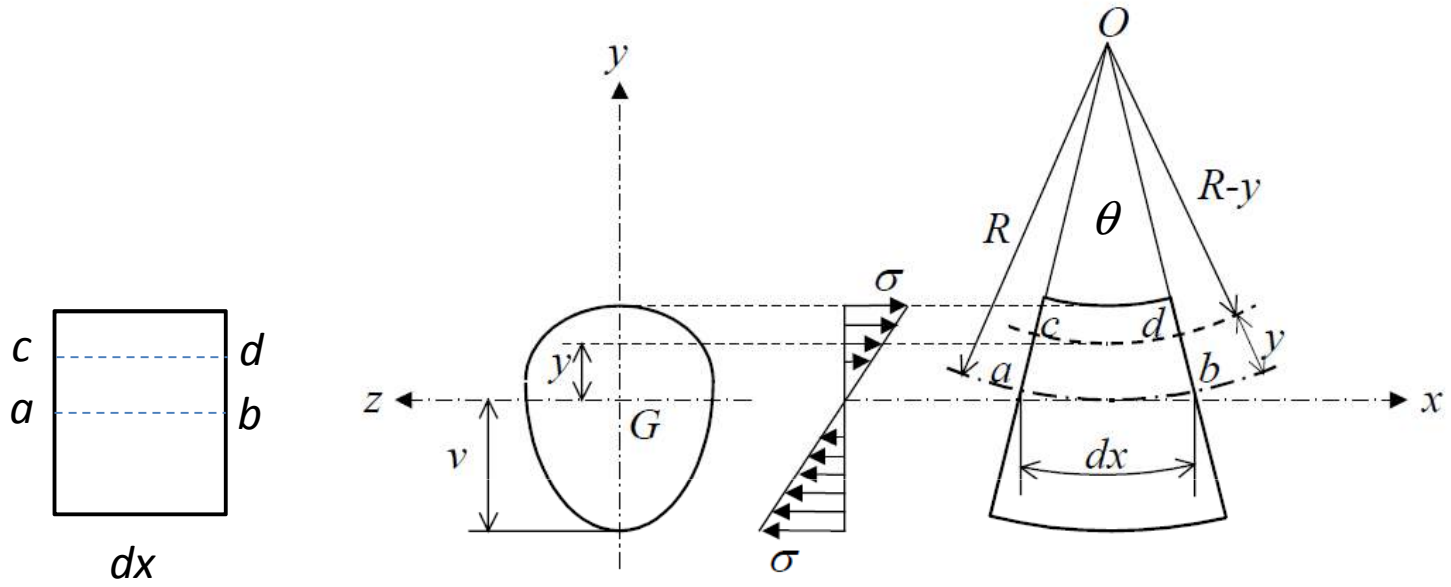



A superfície (s-s) de uma secção recta qualquer transforma-se, após a deformação, nas superfícies (s') e (s") de cada uma das partes (E) e (D), respectivamente. Porque os dois troços E e D são idênticos e sujeitos ao mesmo tipo de solicitação, as superfícies (s') e (s") devem ser simétricas relativamente ao plano de corte (s-s). E porque devem também ser sobreponíveis, as secções rectas têm de se manter planas. Por razões de simetria, esses planos devem passar todos pelo centro de curvatura do eixo da viga deformada.

**Hipótese de Bernoulli**

Durante o processo de deformação, as secções rectas da viga permanecem planas e perpendiculares às fibras deformadas. Cada secção recta roda relativamente às secções vizinhas, em torno do eixo neutro (n-n), de tal modo que o seu plano passa pelo centro de curvatura O do eixo da viga.

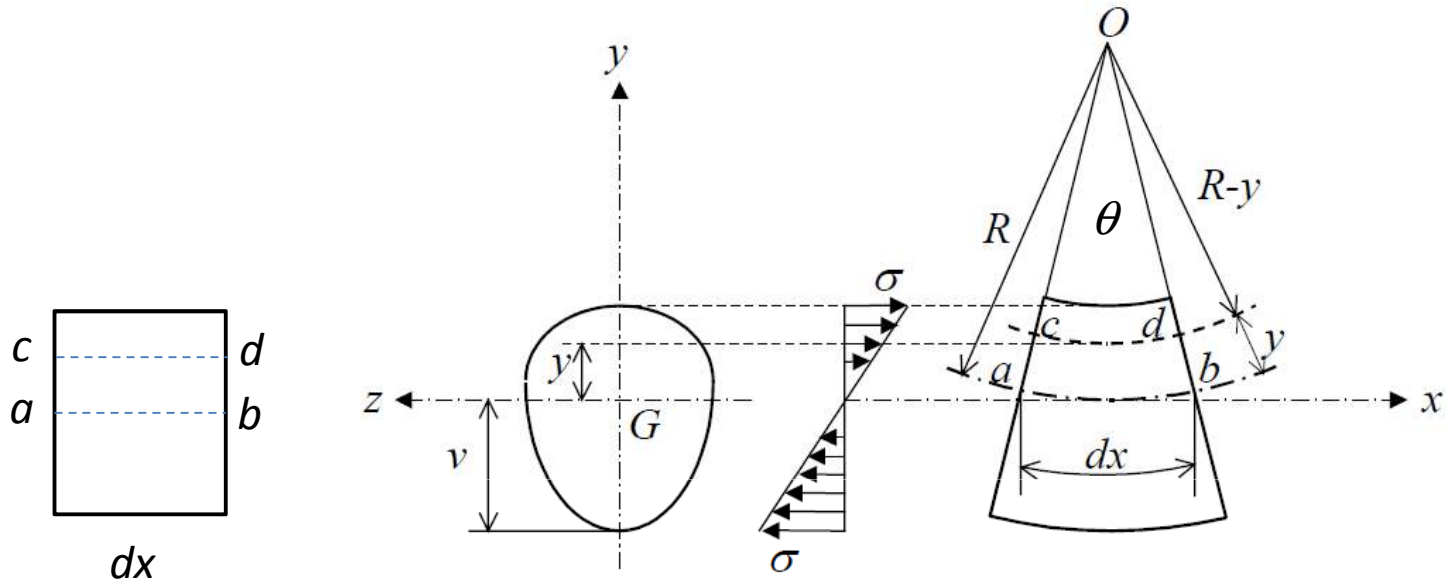
*Deformação de uma fibra longitudinal (c-d)*




$$\varepsilon_{xx} = \frac{cd - ab}{ab}$$

$$\left.\begin{aligned} cd &= (R - y)\theta \\ ab &= R\theta \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon_{xx} = \frac{R - y}{R} - 1 = -\frac{y}{R} \quad \Rightarrow \quad \sigma_{xx} = E\varepsilon_{xx} = -E\frac{y}{R}$$

*Deformação de uma fibra longitudinal (c-d)*



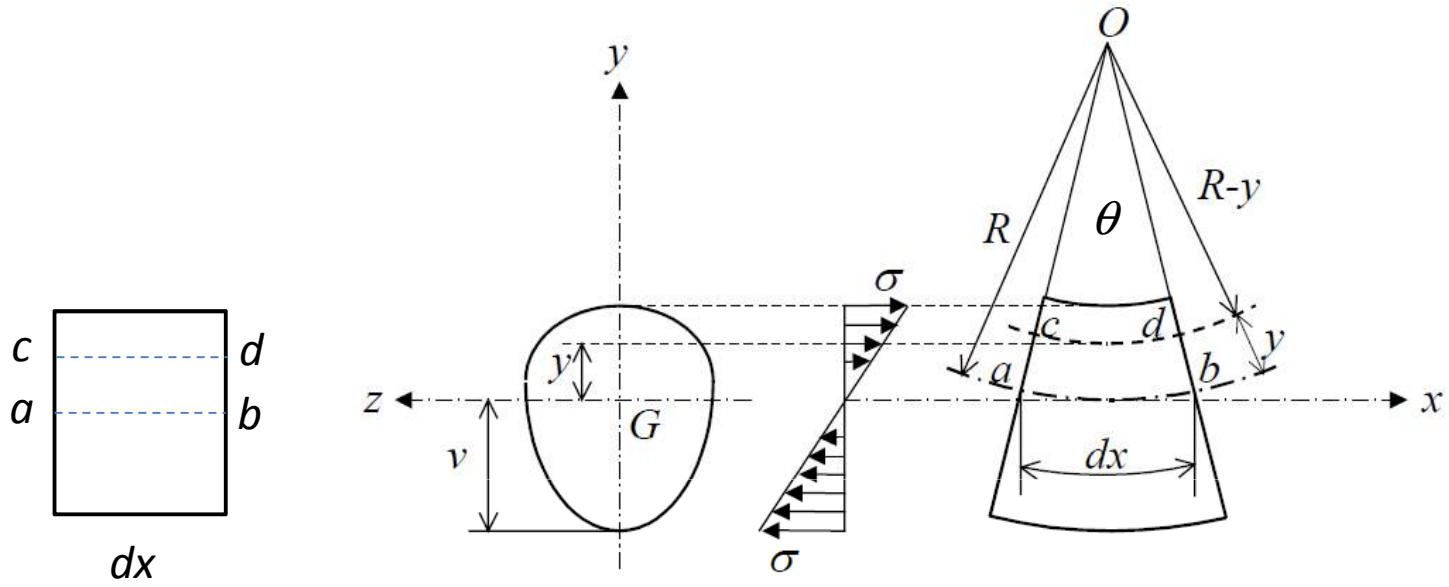

Definição da posição do eixo neutro:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow \int_A \sigma_{xx} dA = 0 \Rightarrow \frac{E}{R}\int_A y dA = 0$$

Momento estático da secção

Resulta então que o eixo neutro passa pelo centro de gravidade da secção recta da viga.

*Deformação de uma fibra longitudinal (c-d)*

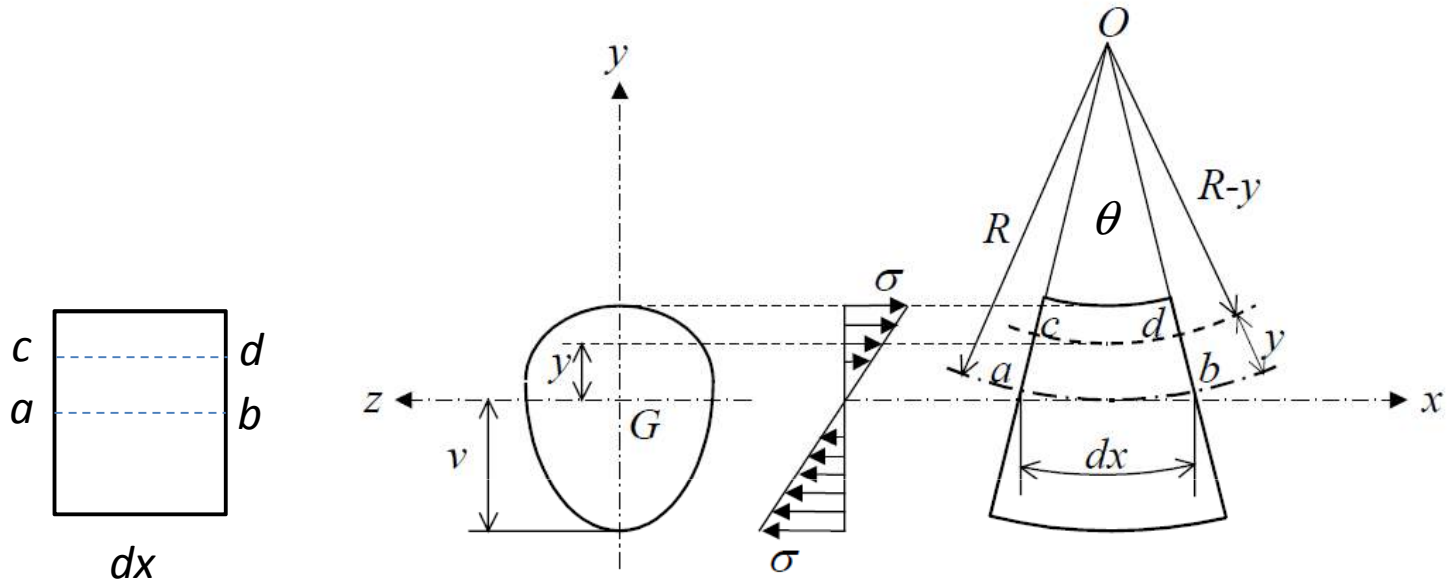



$$dM_z = \sigma_{xx} dydzy \therefore M_z = \int_A \sigma_{xx} ydydz = -\frac{E}{R}\int_A y^2 dA$$

Momento de inércia da secção, $I_z$

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_z} \Rightarrow \boxed{\sigma_{xx} = -\frac{My}{I_Z}}$$

*Deformação de uma fibra longitudinal (c-d)*



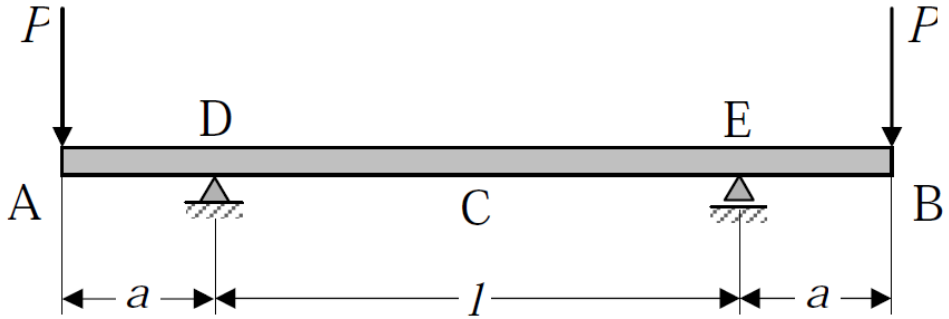

$$M_y = \int_A \sigma_{xx} z dy dz = \frac{E}{R} \int_A yz dA = 0$$

Produto de inércia da secção, $P_{yz}$

Resulta então que os eixos *z* e *y* devem ser eixos principais centrais de inércia da secção.

*Exercícios*

**5.2.1** Considere uma viga em aço (E=200 GPa, υ=0,3) de secção circular (diâmetro d), conforme representado na figura, sujeita a um esforço de flexão pura no troço central DE.




Tomando a = 350 mm, l = 1500 mm, d =250 mm e P =12 ton, determine:

a) O valor máximo da tensão de flexão na viga.
b) A deflexão do eixo da viga na secção média C.

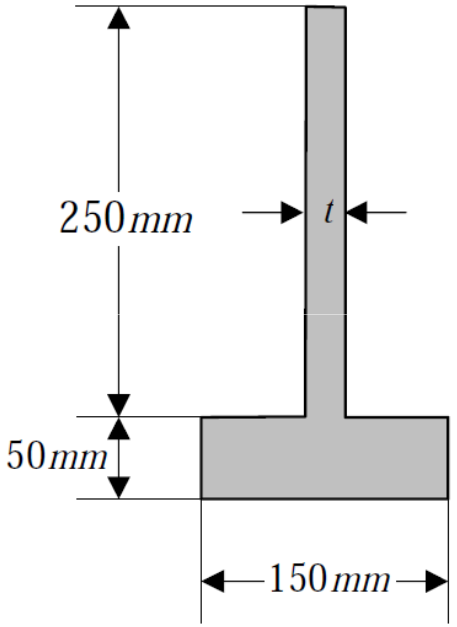
*Exercícios*

**5.2.3** Pretende-se dimensionar uma viga de ferro fundido, para trabalhar à flexão, com uma secção em T, conforme ilustrado na seguinte figura.

Admitindo que, para o material em causa, a tensão admissível à tracção ($\sigma_t$=30MPa) é metade da tensão admissível à compressão ($\sigma_c$=60MPa), determine:

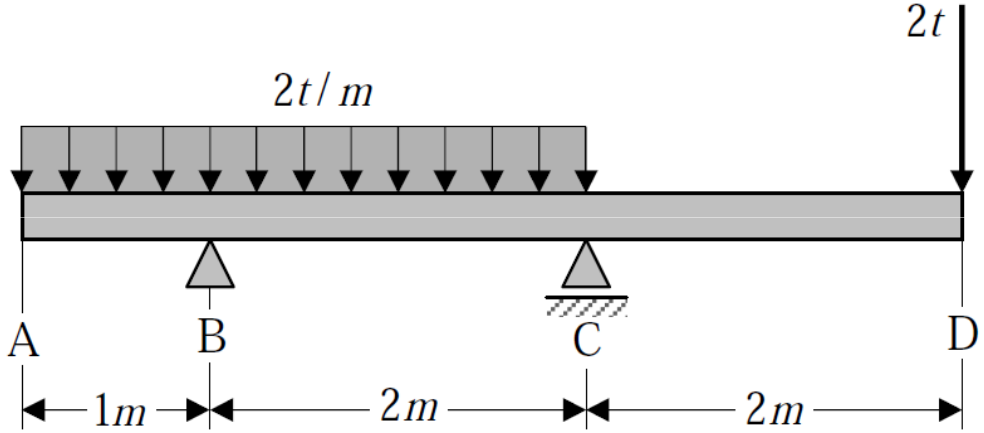
a) A espessura t da "alma" da viga, por forma a que sejam atingidos os dois valores limites em ambas as faces da viga.

b) O momento flector correspondente.



*Exercícios*

**5.2.4** Considere a viga de secção uniforme representada na figura e carregada da forma indicada. Identifique as secções críticas em termos das tensões de corte, associadas ao esforço transverso, e das tensões de flexão.

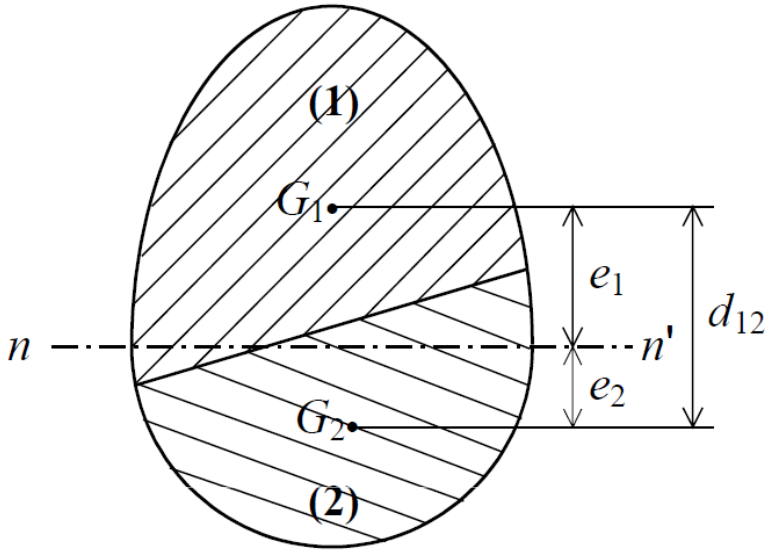


# Aula #16

## Sumário:

- Vigas compostas de dois ou mais materiais diferentes.
- Flexão desviada.
- Problemas 5.2.5 e 5.2.6.

## Vigas compostas de dois ou mais materiais diferentes




Considere-se uma viga composta por dois materiais (1) e (2), com módulos de Young $E_1$ e $E_2$.

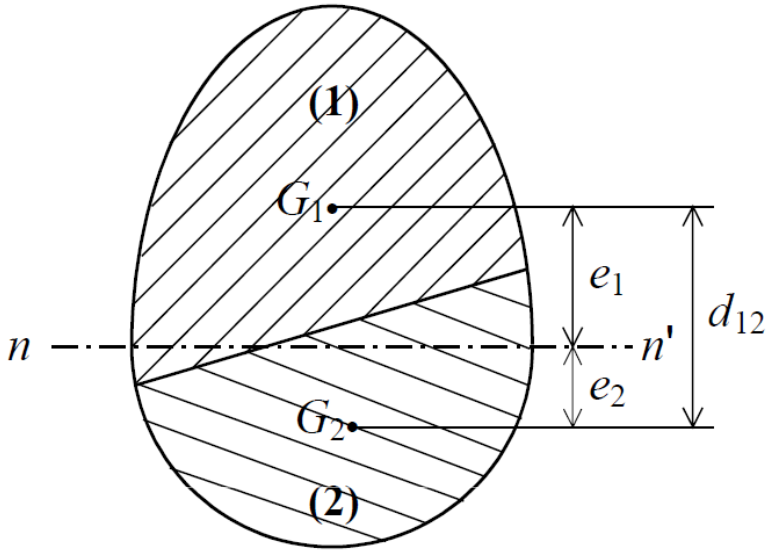
Para um plano de solicitação vertical, a posição do eixo neutro, n-n', obtém-se a partir da condição:

$$\int_A \sigma \, dA = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{A_1} \sigma_1 \, dA_1 + \int_{A_2} \sigma_2 \, dA_2 = 0$$

$$\sigma = -\frac{E\, y}{R} \quad \Rightarrow \quad \int_{A_1} \frac{E_1}{R} y \, dA_1 + \int_{A_2} \frac{E_2}{R} y \, dA_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad E_1 \int_{A_1} y \, dA_1 + E_2 \int_{A_2} y \, dA_2 = 0$$

$$E_1 A_1 e_1 + E_2 A_2 e_2 = 0$$

## Vigas compostas de dois ou mais materiais diferentes




Definindo $d_{12}$ como sendo a distância vertical entre $G_1$ e $G_2$:

$$e_1 - e_2 = d_{12}$$

Resulta:

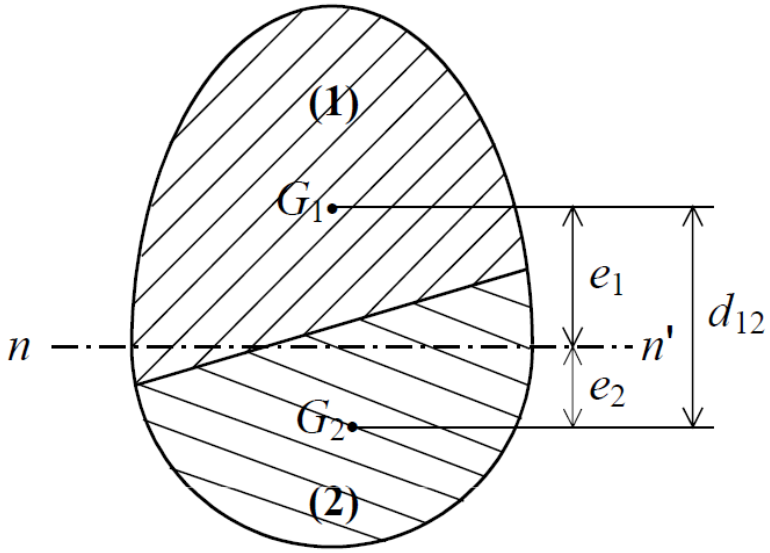
$$e_1 = \frac{E_2 A_2 \, d_{12}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

$$e_2 = -\frac{E_1 A_1 \, d_{12}}{E_1 A_1 + E_2 A_2}$$

Considerando agora a condição de equilíbrio entre o momento flector aplicado, M, e as tensões, σ, obtém-se:

$$M = -\int_A \sigma \, y \, dA = -\int_{A_1} \sigma_1 \, y \, dA_1 - \int_{A_2} \sigma_2 \, y \, dA_2$$

## Vigas compostas de dois ou mais materiais diferentes




Por outro lado:

$$\sigma_1 = -\frac{E_1\, y}{R} \qquad \text{e} \qquad \sigma_2 = -\frac{E_2\, y}{R}$$

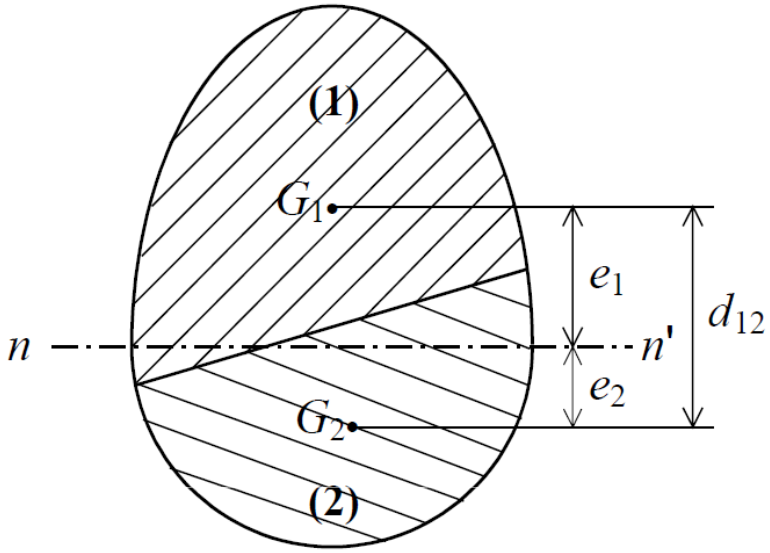
Resulta então:

$$M = \frac{E_1}{R}\int_{A_1} y^2\, dA_1 + \frac{E_2}{R}\int_{A_1} y^2\, dA_2$$

$I_1$ $I_2$

$$M = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{R}$$

## Vigas compostas de dois ou mais materiais diferentes




$$R = \frac{E_1 I_1 + E_2 I_2}{M}$$

Resultando:

$$\sigma_1 = -\frac{M E_1 \, y}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

$$\sigma_2 = -\frac{M E_2 \, y}{E_1 I_1 + E_2 I_2}$$

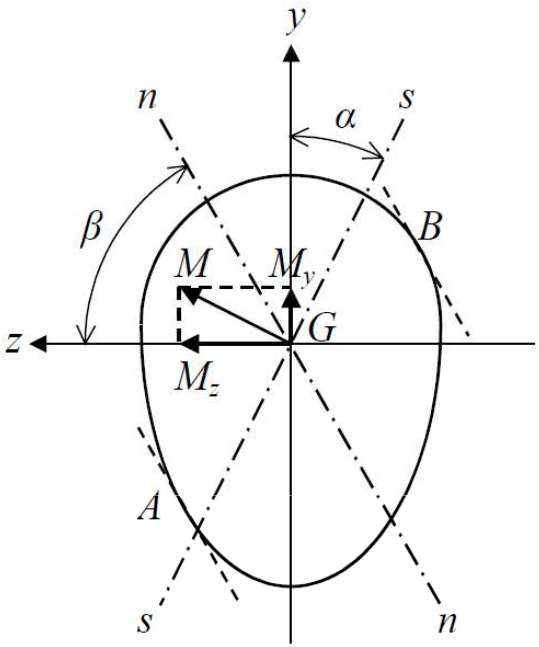
onde y é a distância ao eixo neutro da viga composta, definido pelas cotas $e_1$ e $e_2$ calculadas acima.

As expressões anteriores para a posição do eixo neutro e para o cálculo das tensões podem ser generalizadas a uma viga composta de n materiais diferentes, assumindo as formas seguintes:

$$e_1 = \frac{\sum_{j=2}^{j=n} E_j A_j \, d_{ij}}{\sum_{j=1}^{j=n} E_j A_j}$$

$$\sigma_i = -\frac{M E_i y}{\sum_{j=1}^{j=n} E_j I_j}$$

## Flexão desviada




Quando o plano de solicitação s-s contém o eixo da viga, mas não inclui nenhum dos eixos principais de inércia da secção recta, diz-se que estamos em presença duma flexão desviada.

Nestas circunstâncias, decompõe-se a solicitação segundo os dois eixos principais centrais de inércia:

$$M_z = M\cos\alpha \qquad M_y = M\sin\alpha$$

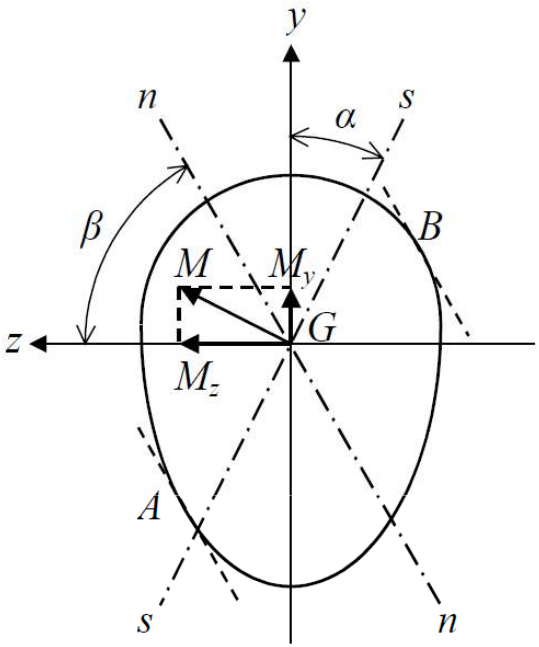
Aplicando o princípio da sobreposição de esforços:

$$\sigma = -\frac{M_z y}{I_z} + \frac{M_y z}{I_y} = M\left(-\frac{y\,cos(\alpha)}{I_z} + \frac{z\,sen(\alpha)}{I_y}\right)$$

A posição do eixo neutro, n-n, obtém-se a partir da condição σ = 0, isto é:

$$-\frac{y\,cos(\alpha)}{I_z} + \frac{z\,sen(\alpha)}{I_y} = 0 \quad \Rightarrow \quad tg(\beta) = \frac{y}{z} = tg(\alpha)\frac{I_z}{I_y}$$

## Flexão desviada




As tensões máximas de flexão ocorrem nos pontos A e B, que são os pontos mais afastados do eixo neutro n-n.

Os ângulos de flexão entre duas secções afastadas dum comprimento *l*, provocadas pelos momentos $M_z$ e $M_y$ são $\phi_y$ e $\phi_z$ , dados respectivamente por:

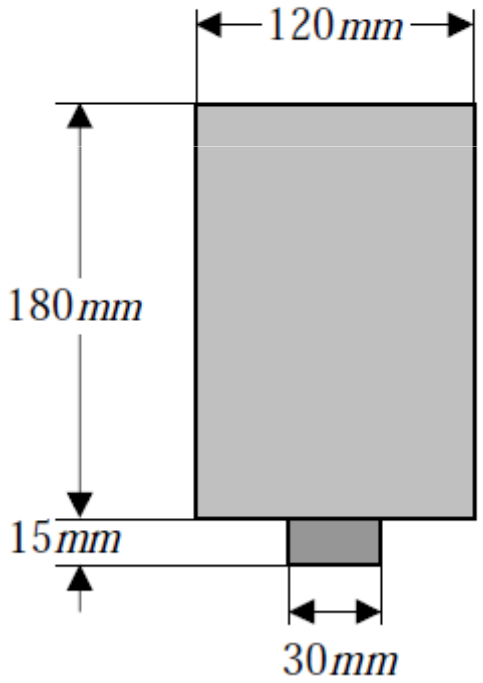
$$\phi_y = \frac{M_y l}{E I_y} \qquad \phi_z = \frac{M_z l}{E I_z}$$

$$\Phi = \sqrt{\phi_y^2 + \phi_z^2} = \frac{Ml}{E}\sqrt{\frac{sen^2(\alpha)}{I_y^2} + \frac{cos^2(\alpha)}{I_z^2}} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{R} = \frac{M}{E}\sqrt{\frac{sen^2(\alpha)}{I_y^2} + \frac{cos^2(\alpha)}{I_z^2}}$$

onde R é o raio de curvatura da fibra neutra da viga em flexão desviada.

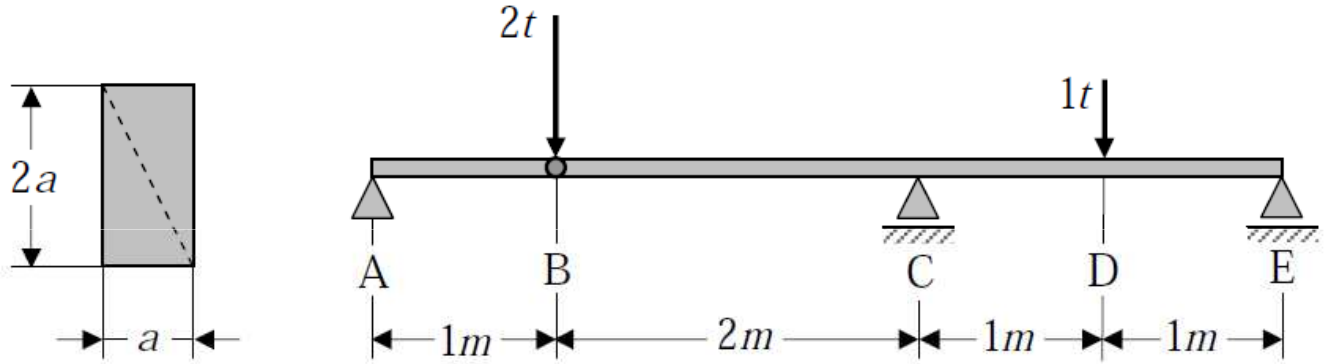
*Exercícios*

**5.2.5** Uma viga em madeira ($E_m$=10GPa), de secção rectangular com largura 120mm e altura 180mm, é reforçada por uma barra de aço ($E_a$=200GPa) de secção também rectangular de 30mm de largura e 15mm de espessura. Determine os valores das tensões máximas em cada um dos elementos, quando ao conjunto é aplicado um momento flector M = 8kNm.



*Exercícios*

**5.2.6** Pretende-se construir uma viga de secção rectangular (2axa), conforme indicado na figura, em aço (E=200GPa, υ=0,3). A viga está apoiada e é solicitada conforme o esquema também indicado na figura. Considere o valor de 140MPa para a tensão de flexão admissível do material.



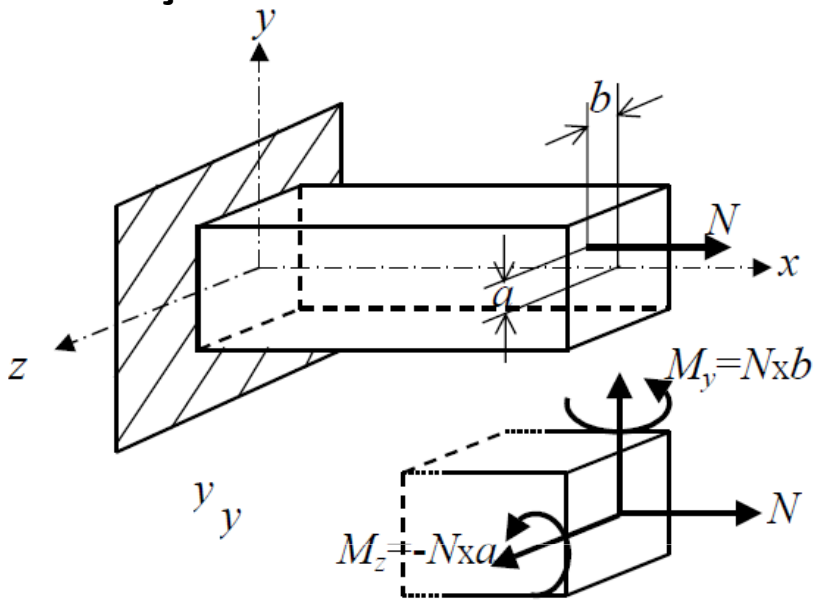

a) Determine as reacções nos apoios.
b) Determine os diagramas dos momentos flectores e dos esforços transversos.
c) Determine o valor mínimo da dimensão a da secção recta da viga, de tal modo que a tensão de flexão não ultrapasse o valor limite de 140 MPa.
d) Supondo agora que o plano de carga é inclinado segundo a direcção da diagonal assinalada a tracejado na figura, determine a posição do eixo neutro da secção e o valor máximo da tensão de flexão.

# Aula #17

## Sumário:

- Flexão combinada com esforço normal.
- Flexão combinada com torção.
- Problemas 5.2.7 e 5.2.8

## Flexão combinada com esforço normal




Aplicando o princípio da sobreposição de esforços é possível calcular a tensão normal para um ponto material definido pelas coordenadas (x,y) como:

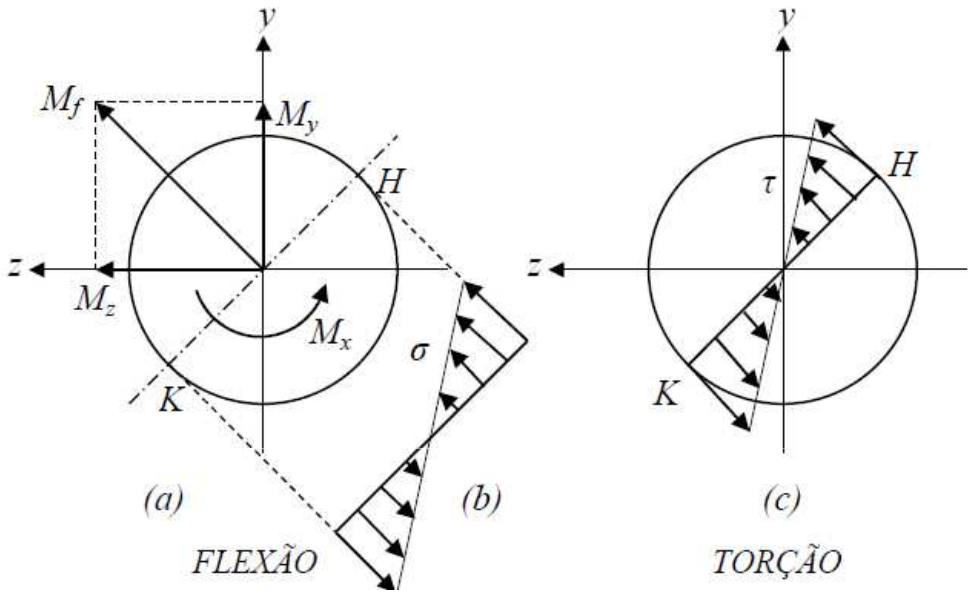
$$\sigma = \frac{N}{A} - \frac{M_z\, y}{I_z} + \frac{M_y\, z}{I_y} = \frac{N}{A} + \frac{N\text{x}a\; y}{I_z} + \frac{N\text{x}b\; z}{I_y}$$

$$M_z = -N\text{x}a \qquad M_y = N\text{x}b$$

*A* é a área da secção recta da viga e *N* é a força axial excêntrica (excentricidades *a* e *b*).

## Flexão combinada com torção

*Secção recta circular*

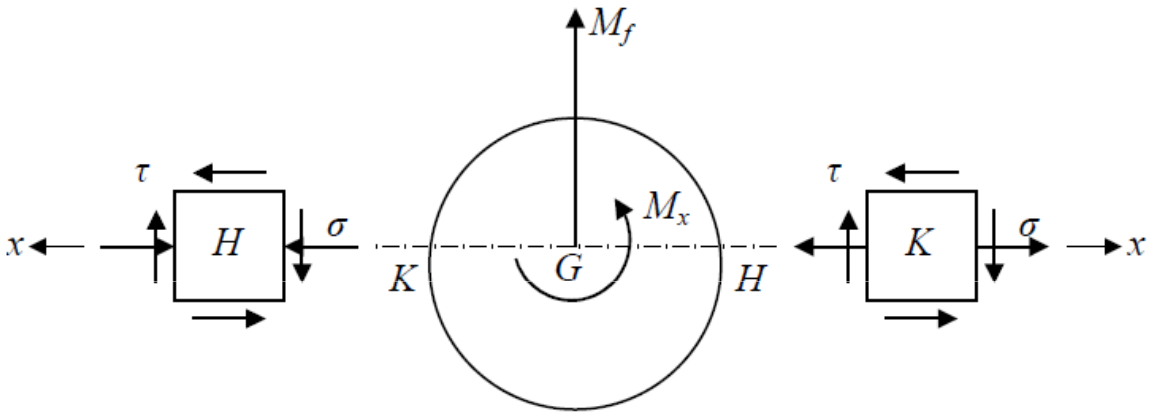



$$\sigma = \frac{M_y z - M_z y}{I_z} \qquad \tau = \frac{M_x r}{I_x}$$

## Flexão combinada com torção

*Secção recta circular*

O eixo neutro tem a direcção do momento flector resultante ($M_f$) e os pontos críticos são H e K, onde a tensão de flexão atinge os valores máximos à tracção e à compressão:



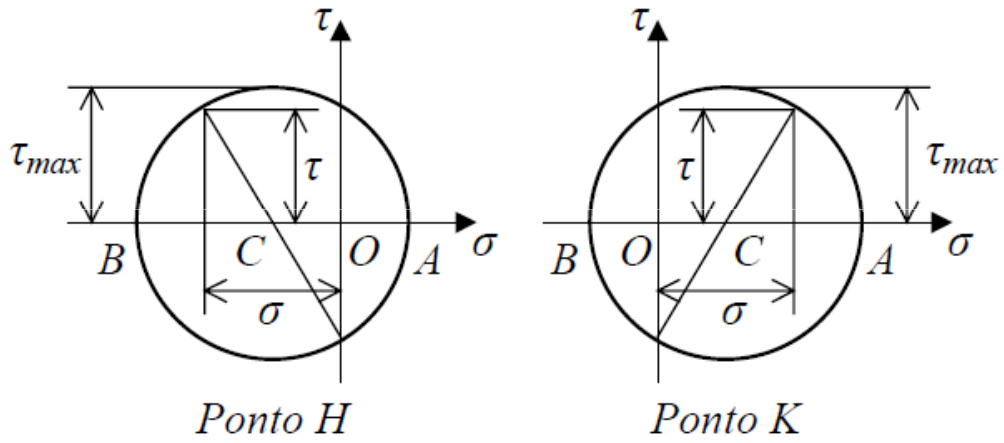

$$\sigma(H) = -\frac{M_f r}{I_z} \qquad \sigma(K) = +\frac{M_f r}{I_z}$$

Do ponto de vista da torção, a tensão máxima também ocorre à periferia (r=R), pelo que nos pontos H e K há a combinação de tensões máximas de fexão e de torção, conforme o esquema da figura anterior.

## Flexão combinada com torção

*Secção recta circular*

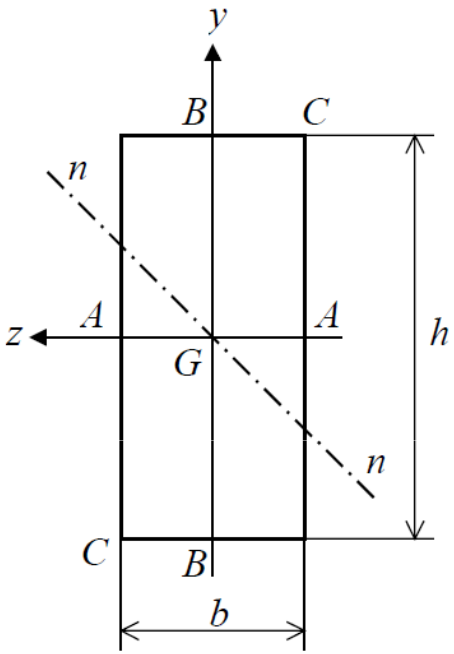
Aplicando a construção do círculo de Mohr à situação em cada um daqueles pontos críticos, obtém-se, em ambos os casos:




$$\tau_{\max} = \sqrt{(\sigma/2)^2 + \tau^2}$$

## Flexão combinada com torção

*Secção recta rectangular*




No caso duma secção rectangular, os pontos críticos à flexão são os pontos C, mais afastados relativamente ao eixo neutro n-n.

No que diz respeito à torção, os pontos críticos da mesma secção são os pontos A, sendo nulas as tensões de corte em C.

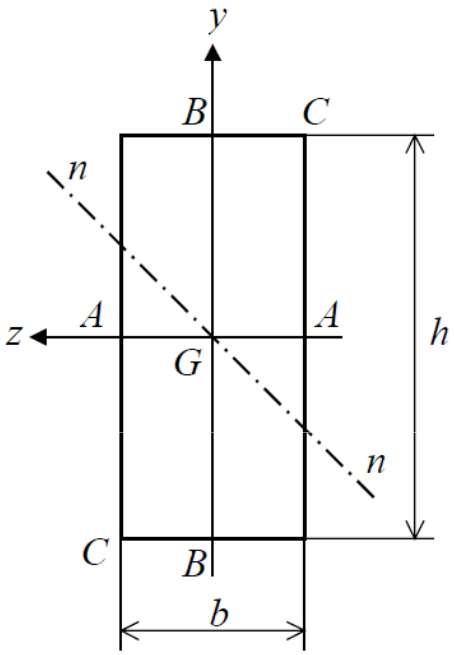
Há ainda a considerar os pontos B da secção recta, onde existem simultaneamente tensões de flexão (σ) e tensões de corte (τ).

Nos pontos A tem-se:

$$\sigma_A = \frac{6M_y}{b^2 h} \qquad \tau_A = \alpha \frac{M_x}{b^2 h}$$

## Flexão combinada com torção

*Secção recta rectangular*




Nos pontos B:

$$\sigma_B = -\frac{6M_z}{bh^2} \qquad \tau_B = \beta\frac{M_x}{b^2h}$$

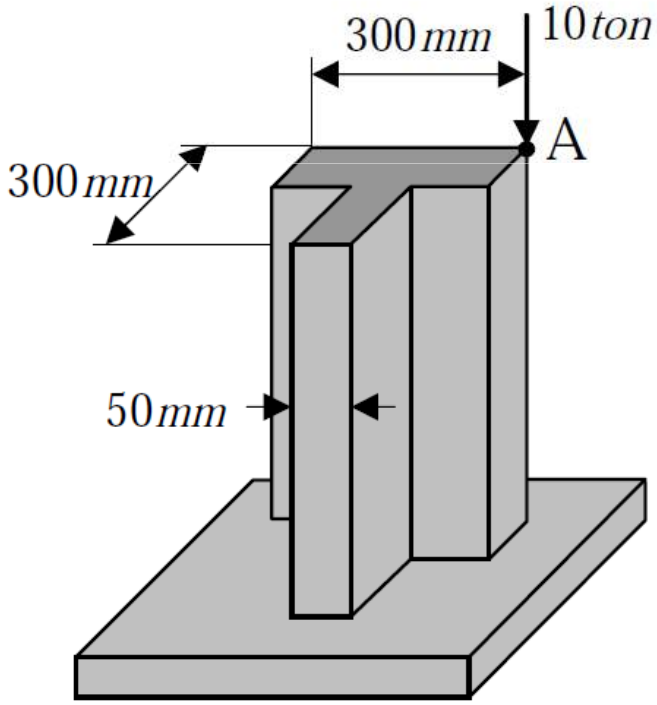
Nos pontos C:

$$\sigma_C = \frac{6M_y}{b^2h} - \frac{6M_z}{bh^2} \qquad \tau_C = 0$$

É então necessário determinar em qual dos pontos A, B ou C ocorre a combinação de tensões mais desfavorável, segundo um critério de resistência apropriado.

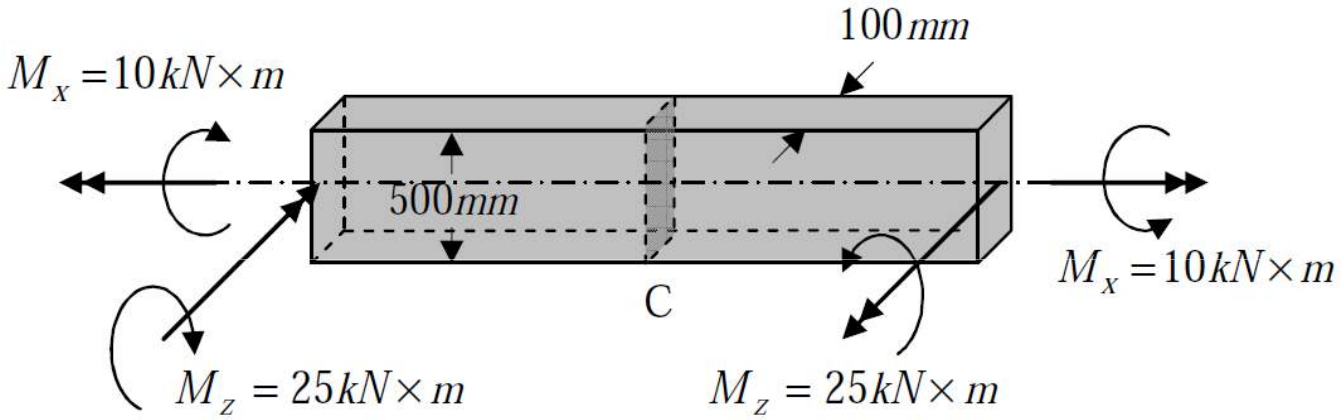
*Exercícios*

**5.2.7** Considere uma coluna de secção em T, construída a partir de chapa de aço de espessura de 50mm (E=200GPa, υ=0,3), conforme representado na figura. A coluna está encastrada na base inferior, sendo carregada na outra extremidade por uma força de 10ton aplicada em A, conforme é também indicado na figura. Determine a tensão normal máxima.



*Exercícios*

**5.2.8** Considere uma viga de secção rectangular (500x100mm$^2$), sujeita a uma solicitação combinada de flexão na vertical e de torção ao longo do eixo da viga, como representado na figura.




Determine a tensão de corte máxima ($\tau_{max}$) numa secção genérica (C) da viga e o ponto onde ocorre.

# Aula #18

## Sumário:

- Flexão combinada com esforço de corte.
- Esforço rasante.
- Viga de secção recta rectangular.
- Viga de secção recta circular.
- Viga de secção tubular aberta. Perfis em U e em I.
- Centro de torção.
- Exercícios 5.2.9 e 5.2.12.

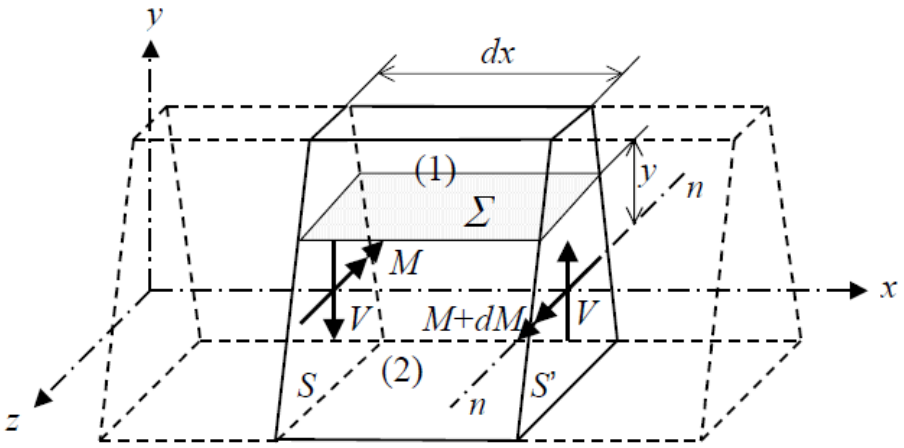
## Flexão combinada com esforço de corte

No caso duma viga sujeita à flexão pura, o esforço de corte é nulo. No caso geral tal não acontece, designadamente quando o momento de flexão varia ao longo do eixo da viga, havendo uma sobreposição de efeitos de flexão e efeitos de corte.

Admitindo a hipótese de Bernoulli que, neste caso é uma aproximação, as tensões normais associadas ao momento flector continuam a ser calculadas pela expressão:

$$\sigma_{xx} = -\frac{M_z y}{I_Z}$$

## Esforço rasante



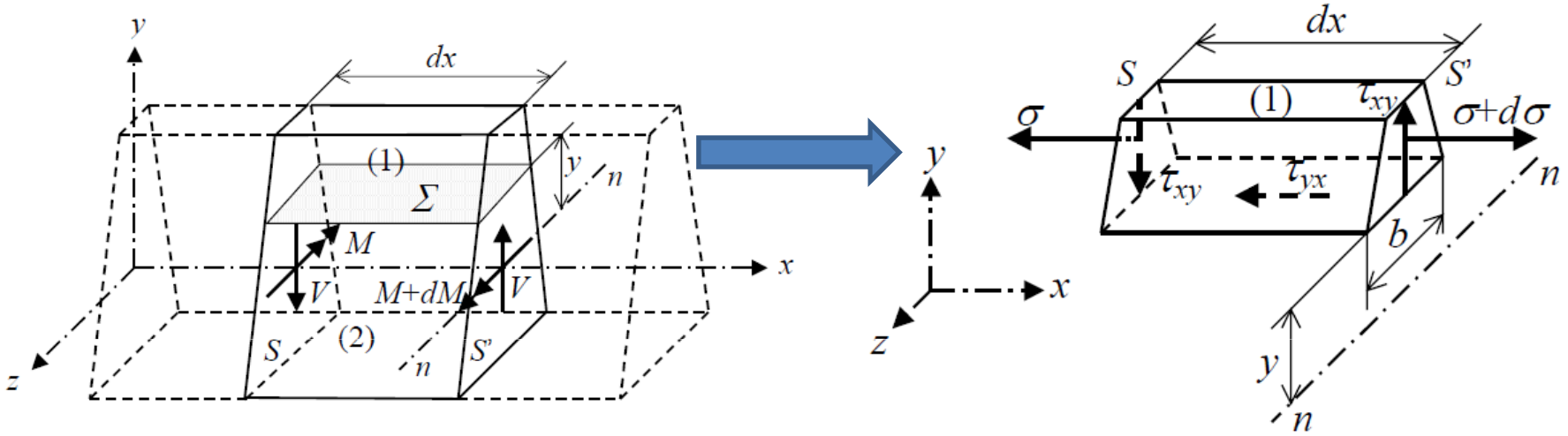

Para obter a distribuição das tensões de corte sobre a secção recta, considere-se o equilíbrio dos momentos num elemento de viga de comprimento dx:

$$dM = -V dx \quad \Rightarrow \quad V = -\frac{dM}{dx}$$

A variação do momento flector ao longo do eixo da viga implica necessáriamente a existência de esforço de corte.

## Esforço rasante

Imagine-se agora o elemento dividido em duas partes (1) e (2), por um plano Σ paralelo à superfície neutra, à distância y do eixo neutro n-n

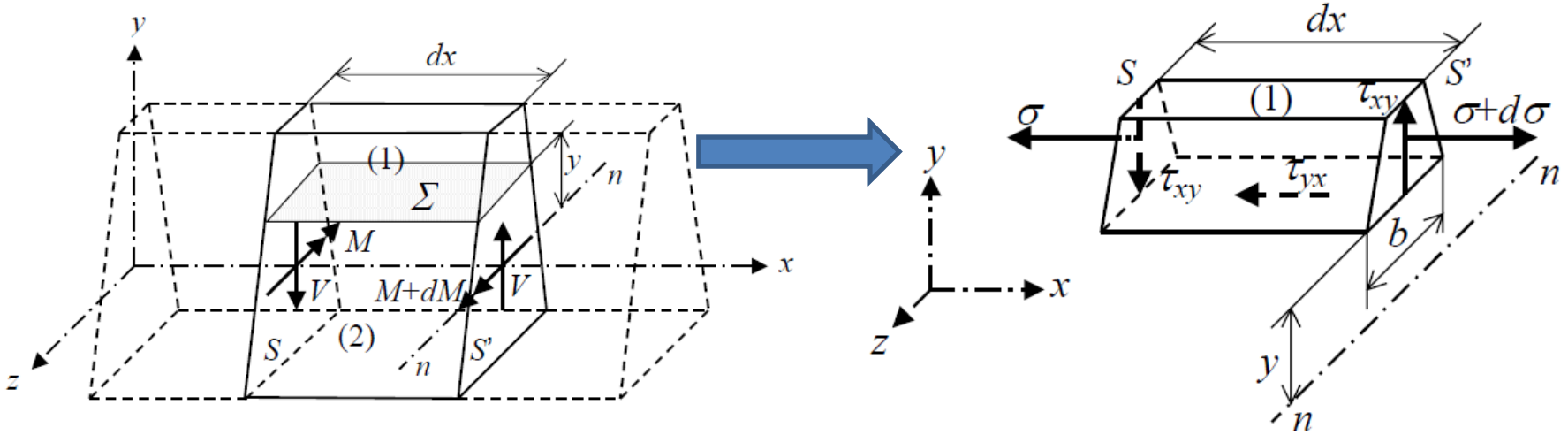



Representando isoladamente a parte (1), esta fica em equilíbrio sob a acção das forças que actuam nas duas faces verticais S e S' e na face inferior Σ.

Na secção S, a força normal N correspondente à tensão de flexão σ é dada por:

$$N = \int_{A_1} \sigma_{xx} dA = -\frac{M}{I_Z} \int_{A_1} y dA$$

## Esforço rasante



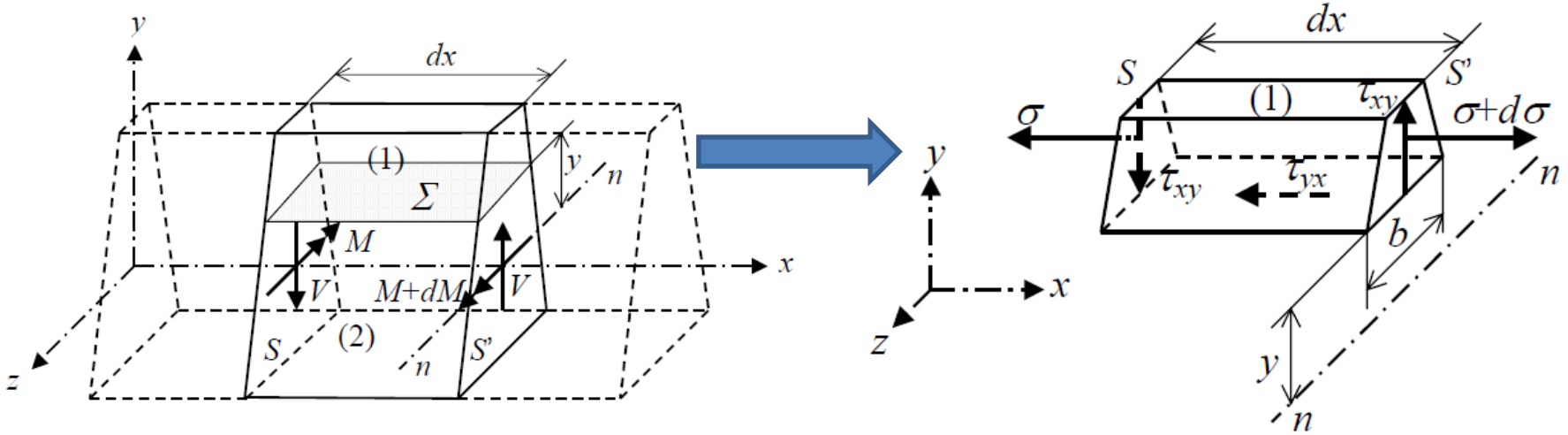

Na secção S', a força normal N' correspondente à tensão de flexão σ+dσ é dada por:

$$N + dN = \int_{A_1} (\sigma_{xx} + d\sigma_{xx}) dA = -\frac{M + dM}{I_Z} \int_{A_1} y dA$$

Na superfície Σ há a considerar as tensões $\tau_{yx}$ (=$\tau_{yx}$), designadas por tensões rasantes. Admitindo que estas se distribuem uniformemente ao longo da espessura b da viga, resulta:

$$V = \tau_{yx} b dx$$

## Esforço rasante




Aplicando a equação de equilíbrio de forças segundo 0-x:

$$\frac{M+dM}{I_Z}\int_{A_1} y dA - \frac{M}{I_Z}\int_{A_1} y dA - \tau_{yx} b dx = 0$$

Momento estático da área $A_1$ relativamente ao eixo neutro da secção

Esforço transverso

$$\tau_{yx} = -\frac{dM}{dx}\frac{\int_{A_1} y dA}{I_Z b} \Rightarrow \tau_{yx}(y) = -\frac{dM}{dx}\frac{S(y)}{I_Z b(y)} = \frac{V S(y)}{I_Z b(y)}$$

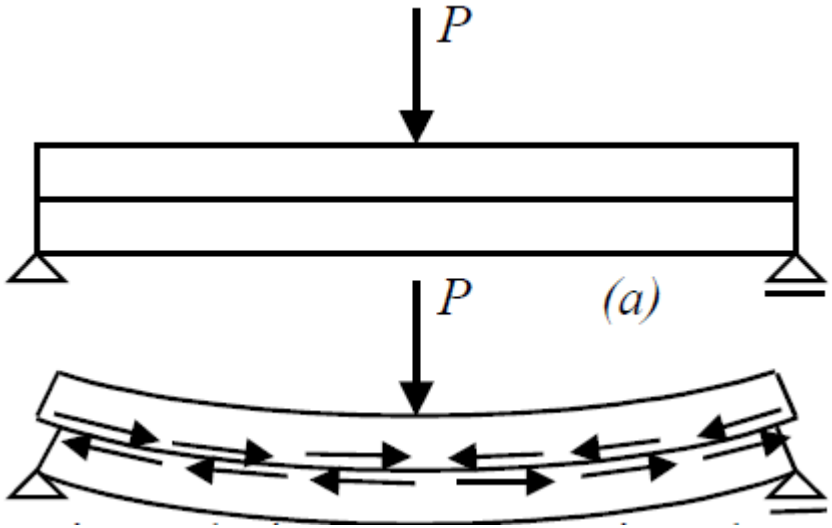
Fórmula de Jouravski

## Esforço rasante

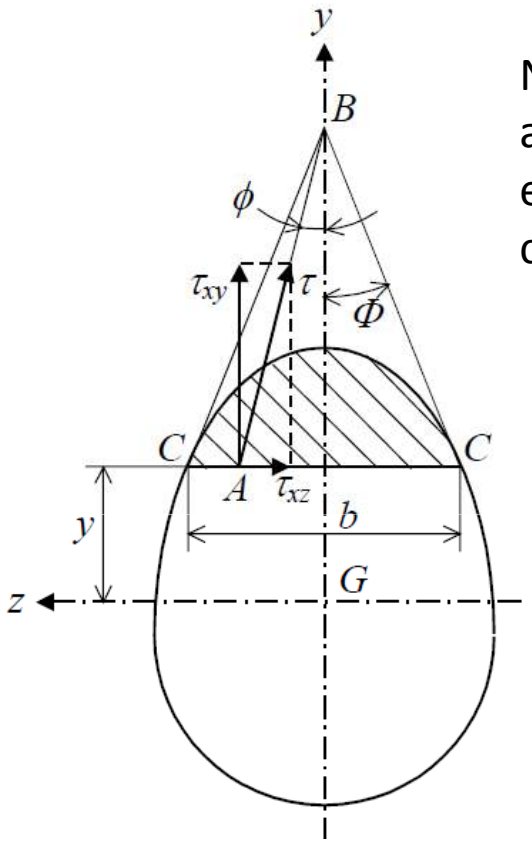
Define-se o esforço rasante *R*, que corresponde a uma força por unidade de comprimento, a partir da seguinte equação:

$$R = \tau_{yx} b = \frac{V\,S}{I_z}$$

Dividindo longitudinalmente a viga em duas partes, estas tenderiam a deformar-se de acordo com o esquema, produzindo um deslizamento relativo entre ambas as partes. Para anular esse deslizamento relativo, há que aplicar as forças tangenciais indicadas, as quais traduzem a tensão ou esforço rasante.



## Esforço rasante




No caso duma secção arbitrária, simétrica relativamente ao eixo 0-y, a tensão de corte τ num ponto A qualquer sobre a horizontal C-C é, em geral, oblíqua relativamente ao eixo de simetria yy. A componente vertical $\tau_{xy}$ é dada por:

$$\tau_{xy} = \frac{V\,S}{I_z\,b}$$

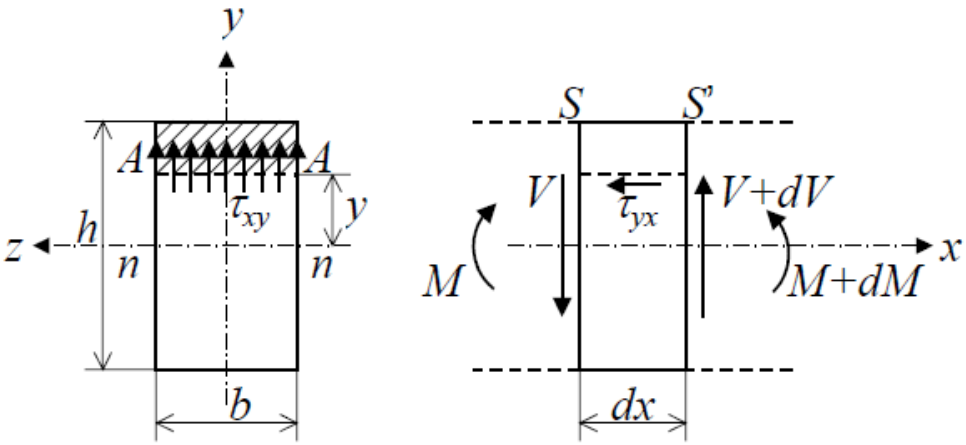
Admitindo que a tensão τ no ponto A está também dirigida para o ponto B, definido a partir das tangentes em C, a componente $\tau_{xz}$ é dada por:

$$\tau_{xz} = \tau_{xy} tg(\phi)$$

$$\tau = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \frac{\tau_{xy}}{\cos(\phi)} = \frac{V\,S}{I_z\,b\cos(\phi)}$$

A tensão de corte máxima ocorre nos pontos C da periferia: $\tau_{\max} = \tau_{xy} / \cos(\Phi)$

## Viga de secção recta rectangular

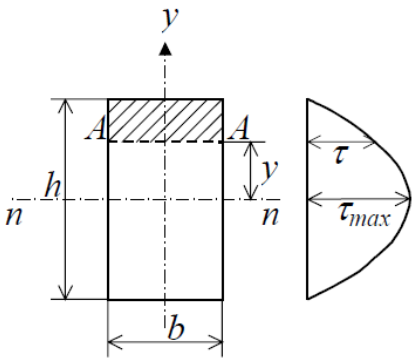



$$\tau_{yx}(y) = \frac{VS(y)}{I_z b(y)}$$

Para uma secção rectangular, momento estático S num plano à distância y do eixo neutro é:

$$S = b\left(\frac{h}{2} - y\right)\frac{h/2 + y}{2} = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)$$

Resulta então: $\tau = \frac{3V}{2bh}\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]$ ⇒ $\tau_{max} = \frac{3}{2}\frac{V}{bh}$

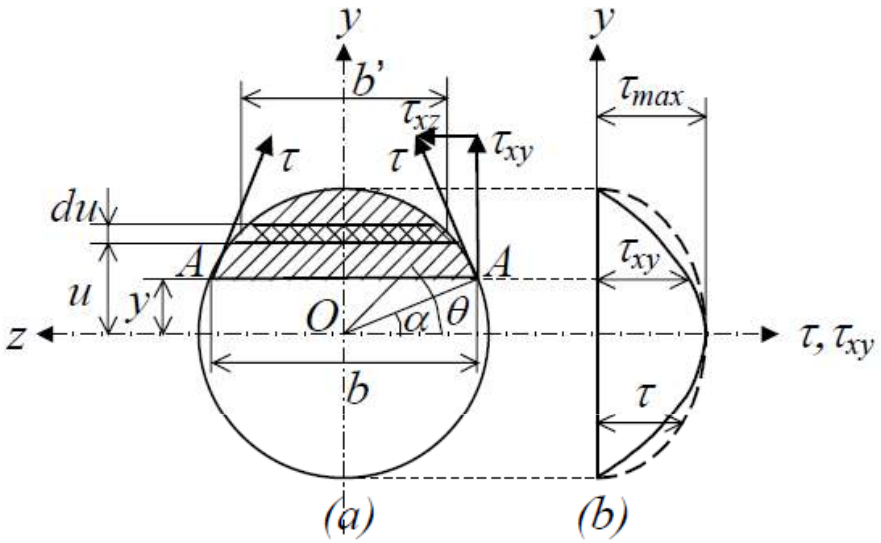



A tensão de corte máxima ocorre ao nível do eixo neutro e é 50% superior àquela que seria obtida dividindo o esforço transverso (V) pela área da secção transversal da viga, isto é, se fosse admitida uma repartição uniforme das tensões de corte ao longo da secção.

## Viga de secção recta circular

Para uma secção circular de raio R, a aplicação da fórmula de Jouravski num plano à distância y do eixo neutro conduz a:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} = \tau = \frac{V}{I_z\, b} \int_y^R u\, b'\, du$$




Da figura anterior resulta:

$$b = 2R\cos(\alpha) \qquad b' = 2R\cos(\theta)$$

$$y = R\,\mathrm{sen}(\alpha) \qquad u = R\,\mathrm{sen}(\theta)$$

$$du = R\cos(\theta)\, d\theta$$

$$\tau_{xy} = \frac{V}{2I_z\, R\cos(\alpha)} \int_a^{\pi/2} 2R^3 \cos^2(\theta)\, \mathrm{sen}(\theta)\, d\theta$$

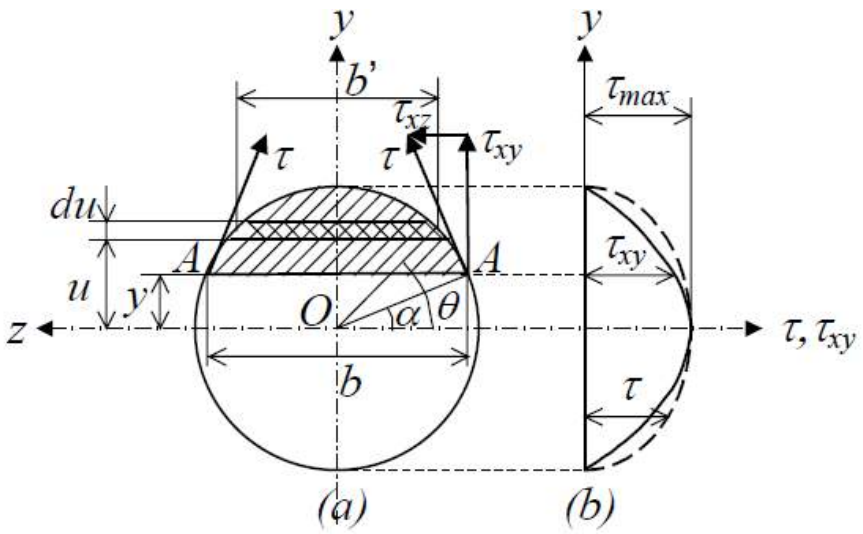
$$= \frac{VR^2}{I_z\cos(\alpha)} \left[ -\frac{\cos^3(\theta)}{3} \right]_\alpha^{\frac{\pi}{2}} = \frac{VR^2\cos^2(\alpha)}{3\, I_z}$$

## Viga de secção recta circular

Considerando que:

$$I_z = \frac{\pi R^4}{4} \quad \text{e} \quad \cos^2(\alpha) = 1 - \frac{y^2}{R}$$

$$\tau_{xy} = \frac{4}{3}\frac{V}{\pi R^2}\left[1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2\right] = \frac{V R^2 \cos^2(\alpha)}{3 I_z}$$



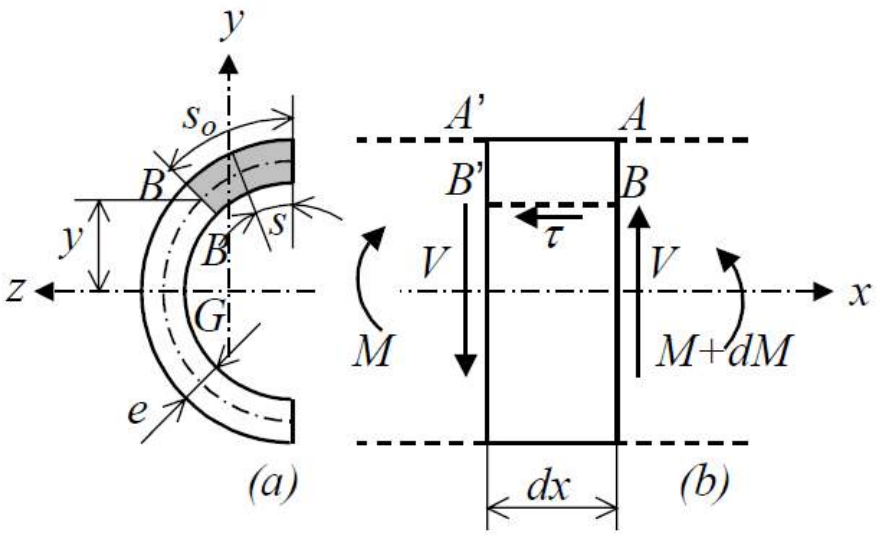

A tensão tangencial resultante τ nos pontos A do contorno é:

$$\tau = \frac{\tau_{xy}}{\cos(\alpha)} = \frac{4}{3}\frac{V}{\pi R^3}\sqrt{1 - \left(\frac{y}{R}\right)^2} \quad \Rightarrow \quad \tau_{max} = \frac{4}{3}\frac{V}{\pi R^2}$$

A tensão de corte máxima ocorre também ao nível do eixo neutro e é 33% superior àquela que seria obtida dividindo o esforço transverso (V) pela área da secção transversal da viga, isto é, se fosse admitida uma repartição uniforme das tensões de corte ao longo da secção.

## Vigas de secção tubular aberta

A fórmula de Jouravski pode também ser aplicada a vigas de secção tubular aberta, como é o caso dos perfis laminados utilizados em construção mecânica e construção civil:

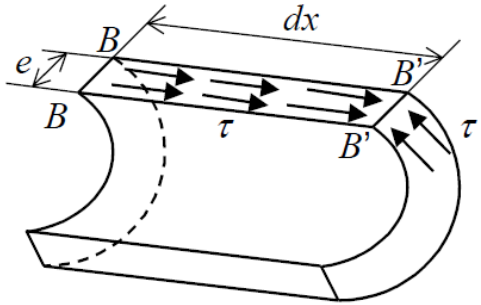



$$R = \frac{V\,S}{I_z} \quad \text{com:} \quad S = \int_0^{s_o} y(s)\,e(s)\,ds$$

Admitindo que as tensões τ que estão associadas ao esforço rasante na secção BBB'B' se distribuem uniformemente através da espessura *e*:

$$\tau = \frac{R}{e} = \frac{V\,S}{e\,I_z}$$

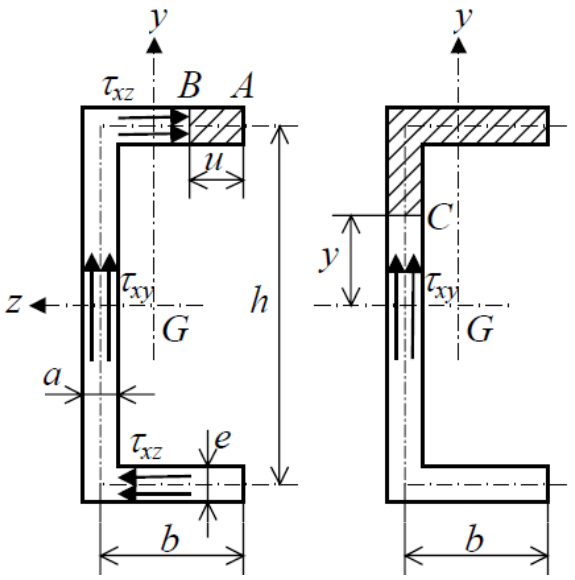
Em virtude do princípio da reciprocidade das tensões tangenciais, pode dizer-se que as tensões rasantes que actuam na face BBB'B' são acompanhadas de tensões de corte iguais, τ, que actuam no plano da secção recta, segundo a direcção da tangente à linha média da parede.



## Vigas de secção tubular aberta

*Caso de um perfil em U*

Nas abas superior e inferior, as tensões de corte são horizontais ($\tau_{xz}$), dadas pela fórmula de Jouravski. Assim, no ponto genérico B da aba superior, à distância *u* do bordo livre A, tem-se:




$$\tau_{xz} = \frac{V\,S}{e\,I_z} = \frac{Vuh}{2\,I_z} \quad \text{e} \quad \tau_{max} = \frac{Vbh}{2\,I_z}$$

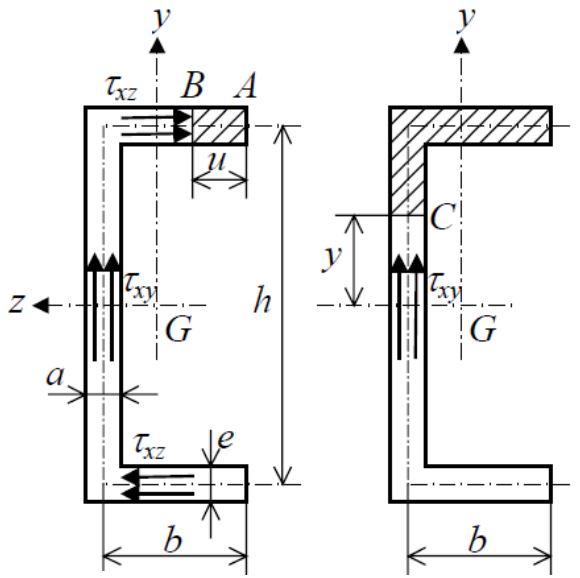
Na aba inferior a distribuição das tensões $\tau_{xz}$ é análoga, havendo apenas uma inversão do sentido.

No ponto genérico C da alma, à distância y do eixo neutro, tem-se: $S = a\,(\frac{h}{2} - y)\frac{h/2 + y}{2} + \frac{beh}{2}$

$$\tau_{xy} = \frac{V\,h^2}{8\,I_z}\left[1 - (2y/h)^2\right] + \frac{Vbeh}{2\,a\,I_z}$$

## Vigas de secção tubular aberta

*Caso de um perfil em U*




A tensão máxima na aba ocorre ao nível do eixo neutro (y=0):

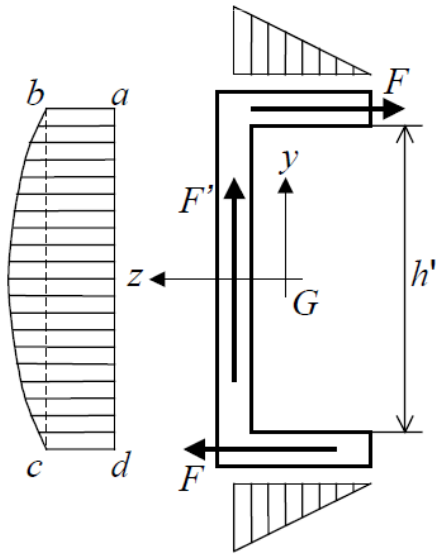
$$\tau_{\max} = \frac{Vh^2}{8I_z} + \frac{Vbeh}{2aI_z}$$

A força resultante (horizontal) em cada uma das abas é:

$$F = \frac{\tau_{max} e\, b}{2} = \frac{Veb^2 h}{4\, I_z}$$

A força resultante (vertical) na alma é:

$$F = \frac{Vah^3}{12 I_z} + \frac{Vebh^2}{2\, I_z} = V$$



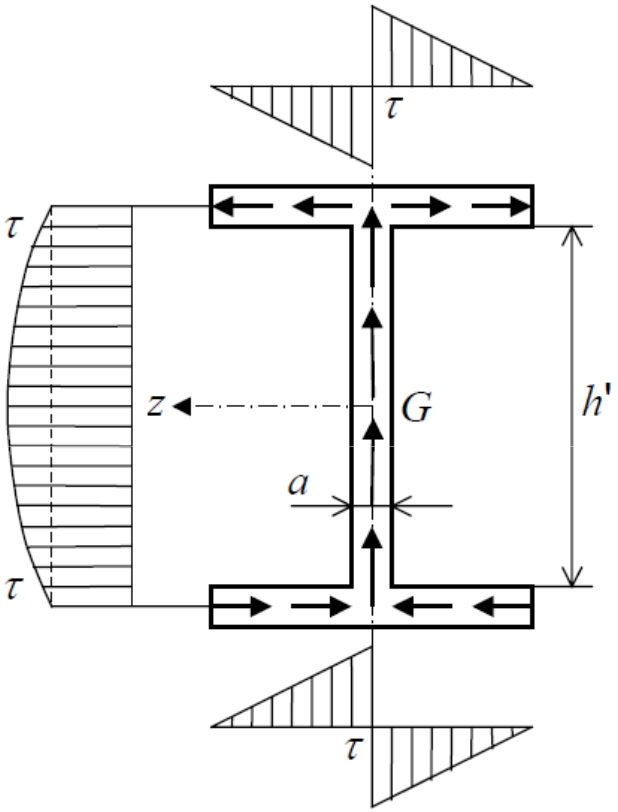
## Vigas de secção tubular aberta

*Caso de um perfil em I*

A solução para o perfil em I obtém-se directamente do caso anterior, considerando o perfil I composto através da junção de dois perfis U.

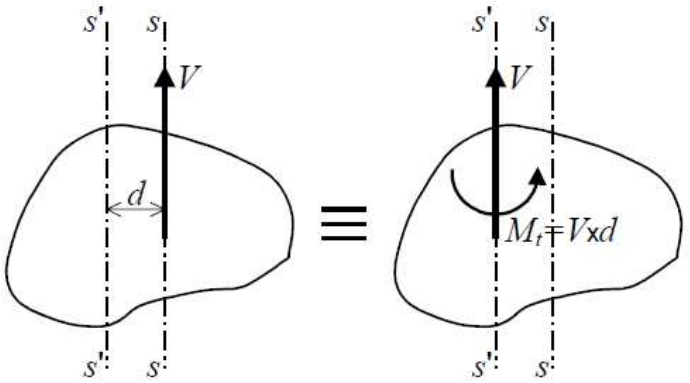
A tensão máxima ocorre na aba, ao nível do eixo neutro (y=0) podendo ser calculada através da expressão:

$$\tau_{max} = \frac{V\,S}{a\,I_z} \cong \frac{V}{a\,h'}$$



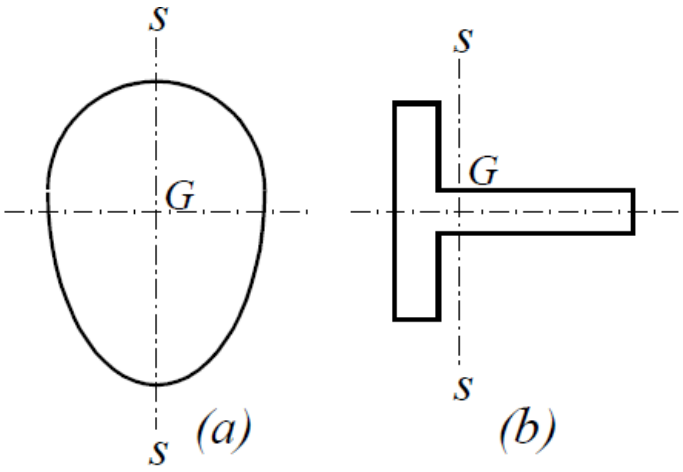
## Centro de torção

Quando a solicitação de flexão é acompanhada dum esforço de corte, a posição do plano de solicitação não é indiferente, uma vez que o seu deslocamento faz variar a distância das forças exteriores ao eixo da viga, introduzindo deste modo um determinado momento torsor.



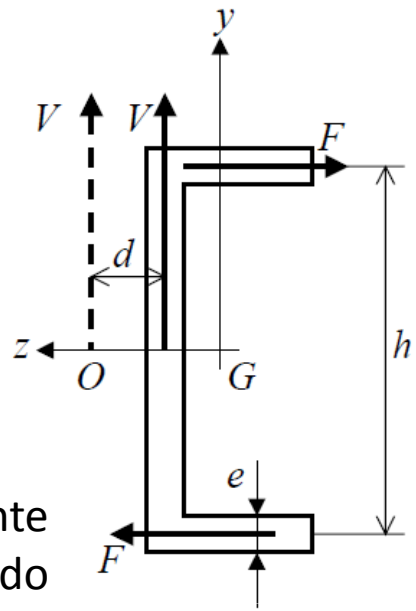

Se a secção recta da viga é simétrica relativamente a um dos eixos principais centrais de inércia, e se o plano de solicitação contém esse eixo (a), por razões de simetria, cada secção roda em torno do eixo neutro, perpendicular aquele eixo de simetria, e a viga deforma-se sem torção.

Já no caso em que o eixo principal central de inércia ss não é eixo de simetria (b), verifica-se um fenómeno secundário de torção da peça. Este fenómeno pode ser claramente posto em evidência através duma análise mais aprofundada do comportamento à flexão duma viga de secção em U.



## Centro de torção

Considere-se uma viga de secção em U solicitada em flexão com esforço transverso. As resultantes das tensões de corte nas abas e na alma são, respectivamente, F, -F e V, em que a forças que actuam nas abas formam um binário de torsão cujo momento é dado por:




$$M_t = F \text{x} h = \frac{V e b^2 h^2}{4 I_z}$$

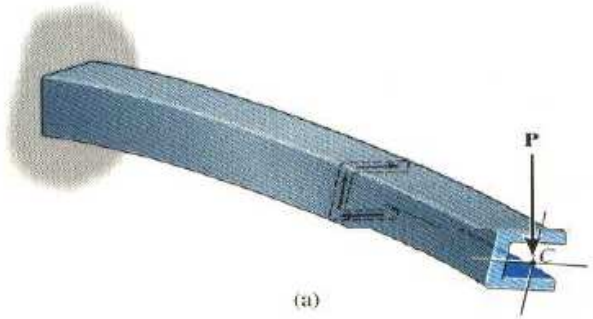
O sistema constituido pelas três forças F, -F e V é equivalente à resultante vertical V, deslocada para a esquerda de uma distância d, de tal modo que:

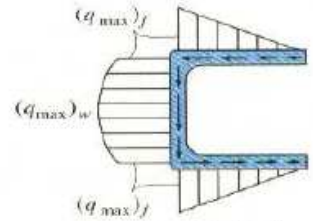
$$V \text{ x } d = F \text{ x } h \qquad \text{e} \qquad d = \frac{F \text{ x } h}{V} = \frac{b^2 h^2 e}{4 I_z}$$

A intercepção da linha de acção dessa força resultante V com o eixo neutro define o ponto O que é o centro de corte ou centro de torção da secção.

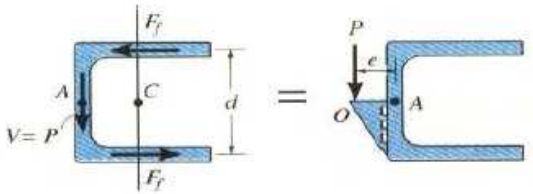
Sempre que o plano de solicitação não passa pelo centro de torção, às tensões associadas ao esforço de corte, haverá que sobrepor as tensões de torção produzidas por um momento torsor igual ao produto do esforço transverso pela distância do plano de solicitação ao centro de torção.

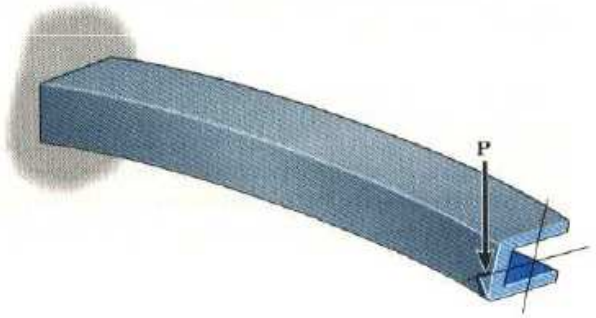
## Centro de torção

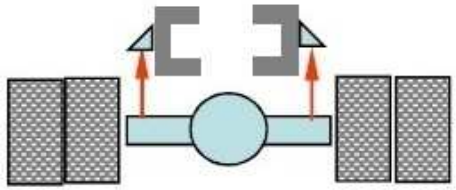




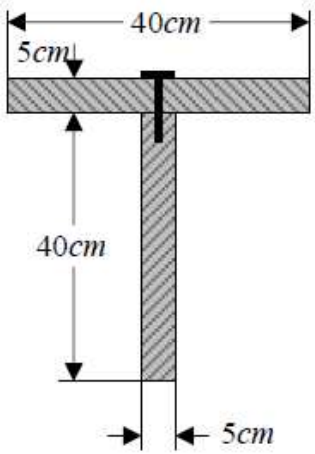



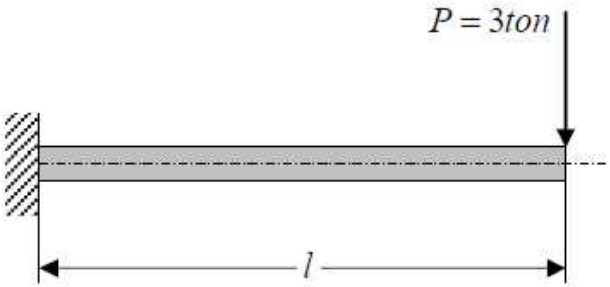
*Exercícios*

**5.2.9** Duas tábuas de madeira estão ligadas por pregos, formando uma viga de secção em T, conforme ilustrado na figura. A viga está encastrada numa das extremidades, apresentando um comprimento em consola *l*, com uma força vertical de 3kN aplicada na extremidade livre. Desprezando o peso próprio da viga, calcule:

a) O valor máximo do comprimento em consola (*l*), para uma tensão admissível à flexão de $\sigma_{adm}$=10MPa.

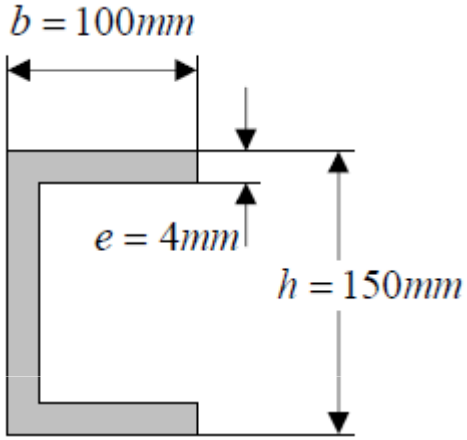
b) O espaçamento máximo entre pregos, supondo que cada um deles aguenta uma força de corte de $F_c$=600N.



*Exercícios*

**5.2.12** Considere uma viga de secção em forma de U, com uma espessura uniforme de 4mm, e com as dimensões globais indicadas na figura a seguir.




Determine:

a) A posição do centro de corte da secção.

b) A distribuição das tensões de corte provocadas por um esforço transverso vertical de 15kN aplicado no centro de corte.

c) A tensão de corte máxima provocada por um esforço transverso vertical de 15kN aplicado no centróide da secção.

# Aula #19

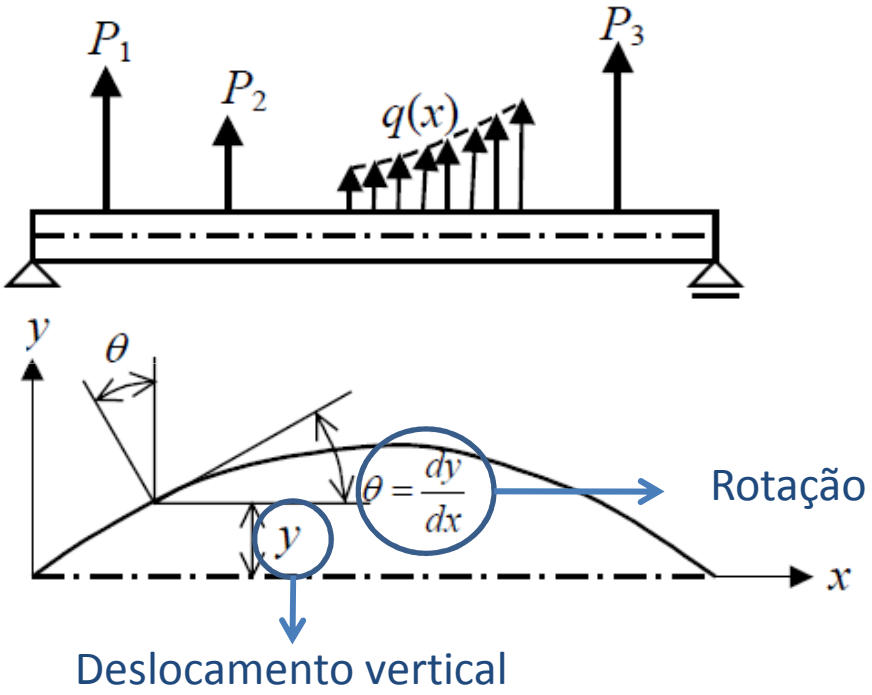
## Sumário:

- Deformação devida à flexão.
- Método da integração da elástica.
- Método da viga conjugada.
- Exercícios 6.2.1 e 6.2.4.

**Deformação devida à flexão.**

*Integração da equação da elástica*

Chama-se linha elástica à deformada do eixo da viga, definida por uma equação do tipo y = f(x).




No caso da flexão plana, a relação entre a curvatura 1/*R*, o momento flector *M*, o módulo de Young do material *E* e o momento de inércia $I_z$ da secção recta em relação ao eixo neutro é dada pela equação seguinte:

$$\frac{1}{R} = \frac{M}{EI_z}$$

**Deformação devida à flexão.**

*Integração da equação da elástica*

Por outro lado, recorrendo às equações da geometria analítica, a curvatura é dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{\dfrac{d^2y}{dx^2}}{\left[1+\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Considerando pequenas rotações:

$$\frac{dy}{dx} \lll 1 \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}}$$

Equação da elástica

A equação da elástica corresponde a uma equação diferencial de segunda ordem que permite obter a deformação da viga a partir do diagrama de esforços *M(x)* e das condições fronteira do problema.

**Deformação devida à flexão.**

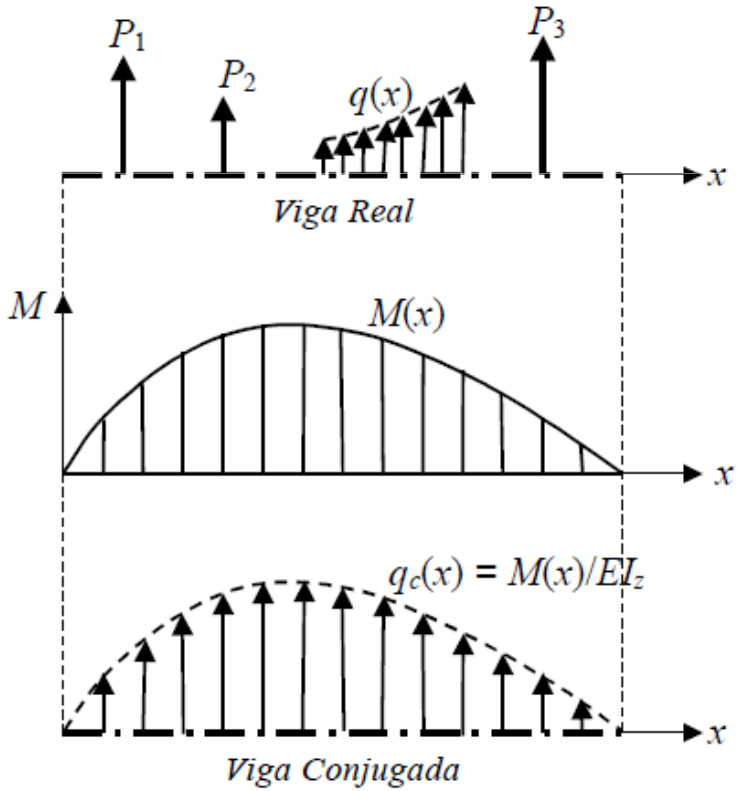
*Método da viga conjugada*

Como foi demonstrado na aula #11:

$$\left.\begin{aligned} V &= -\frac{dM}{dx} \\ q &= -\frac{dV}{dx} \end{aligned}\right\} \quad q = \frac{d^2M}{dx^2}$$

Associada a uma viga real, considere-se agora uma viga fictícia (viga conjugada) com o mesmo comprimento e carregada com uma distribuição de cargas semelhante à dos momentos flectores sobre a viga real:

$$q_c(x) = \frac{M(x)}{EI_z}$$



*Método da viga conjugada*

O momento flector $M_c$ sobre a viga conjugada pode obter-se por integração da seguinte equação:

$$\frac{d^2 M_c}{dx^2} = q_c(x)$$ ➡ Viga conjugada.

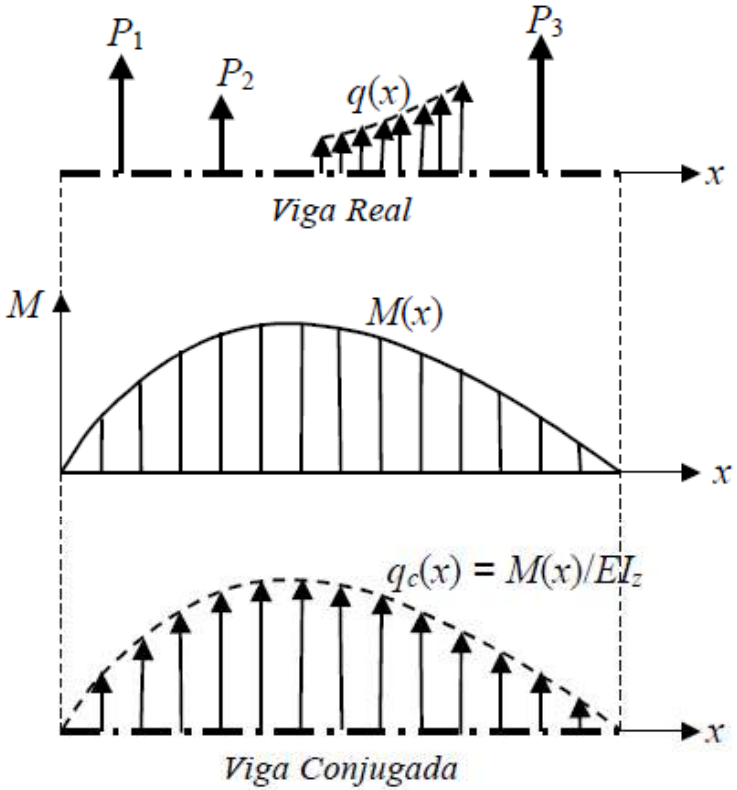
Recordando a equação da elástica:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI_z}$$ ➡ Viga real.

Por outro lado:

$$\frac{dM_C}{dx} = -V_C$$ ➡ Viga conjugada.

$$\frac{dy}{dx} = \theta$$ ➡ Viga real.




Donde se pode concluir que:

- A flecha *y* de uma secção arbitrária da viga real é igual ao momento flector $M_c$ para a mesma secção da viga conjugada.
- A a rotação θ=*dy/dx* de uma secção arbitrária da viga real é igual ao esforço cortante $-V_c$ para a mesma secção da viga conjugada.

*Método da viga conjugada*

A correspondência entre as constantes de integração da equação da elástica e da equação equivalente dos momentos da viga conjugada consegue-se impondo as seguintes condições nos apoios (e secções intermédias) da viga conjugada:

- Se no ponto considerado a flecha $y$ da viga real é nula, então o momento flector da viga conjugada deve ser nulo.

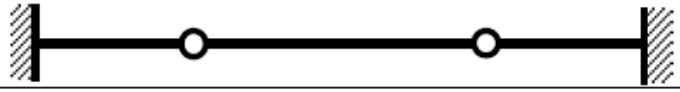
- Se o ângulo de rotação $\theta$ da viga real é nulo, então o esforço transverso $V_c$ da viga conjugada deve ser nulo.

- Se $y \neq 0$ e $\theta \neq 0$ na viga real, então também $M_c \neq 0$ e $V_c \neq 0$ na viga conjugada.

*Método da viga conjugada*

| *VIGA REAL* | | *VIGA CONJUGADA* | |
|---|---|---|---|
| *Apoio Simples* | $y = 0$<br>$\theta \neq 0$ | $M_c = 0$<br>$V_c \neq 0$ | *Apoio Simples* |
| *Encastramento* | $y = 0$<br>$\theta = 0$ | $M_c = 0$<br>$V_c = 0$ | *Extremo Livre* |
| *Extremo Livre* | $y \neq 0$<br>$\theta \neq 0$ | $M_c \neq 0$<br>$V_c \neq 0$ | *Encastramento* |
| *Apoio Intermédio* | $y = 0$<br>$\theta \neq 0$ | $M_c = 0$<br>$V_c \neq 0$ | *Rótula Intermédia* |
| *Rótula Intermédia* | $y \neq 0$<br>$\theta \neq 0$ | $M_c \neq 0$<br>$V_c \neq 0$ | *Apoio Intermédio* |

*Método da viga conjugada*

| VIGA REAL | VIGA CONJUGADA |
|---|---|
| $y = 0$, $\theta \neq 0$ — $y = 0$, $\theta \neq 0$  | $M_c = 0$, $V_c \neq 0$ — $M_c = 0$, $V_c \neq 0$  |
| $y = 0$, $\theta = 0$ — $y \neq 0$, $\theta \neq 0$  | $M_c = 0$, $V_c = 0$ — $M_c \neq 0$, $V_c \neq 0$  |
| $y = 0$, $\theta \neq 0$ — $y = 0$, $\theta \neq 0$  | $M_c = 0$, $V_c \neq 0$ — $M_c = 0$, $V_c \neq 0$  |
| $y = 0$, $\theta \neq 0$ — $y \neq 0$, $\theta \neq 0$  | $M_c \neq 0$, $V_c \neq 0$  |
| $y = 0$, $\theta = 0$ — $y \neq 0$, $\theta \neq 0$  | $M_c = 0$, $V_c = 0$ — $M_c \neq 0$, $V_c \neq 0$  |

*Método da viga conjugada*

Resumo do método:

1. Representar o diagrama de momentos flectores da viga real.

2. Considerar o eixo das abcissas do diagrama de momentos como o eixo da viga conjugada e o diagrama de momentos $M(x)/EI_z$ como o diagrama da carga conjugada $q_c$.

3. Representar os apoios da viga conjugada utilizando a tabela anterior.

4. Calcular as reacções na viga conjugada .

5. Representar os diagramas de esforços da viga conjugada, $M_c(x)$ e $V_c(x)$.

6. A flecha $y$ e a rotação $\theta$ para uma secção qualquer da viga real são dados por:

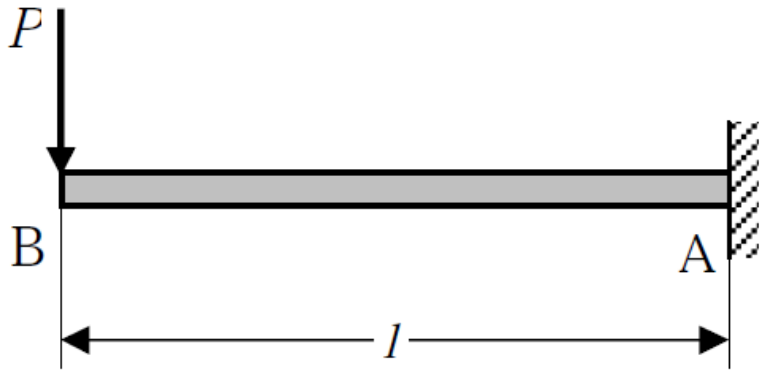
$$\begin{cases} y = M_C \\ \theta = -V_C \end{cases}$$

*Exercícios*

**6.2.1** Considere uma viga (*E, I*) de comprimento *l*, encastrada numa extremidade e sujeita a uma carga vertical P na extremidade livre, conforme ilustrado na figura ao lado. Calcule a flecha $\delta_B$ e a rotação $\theta_B$ na extremidade livre da viga:

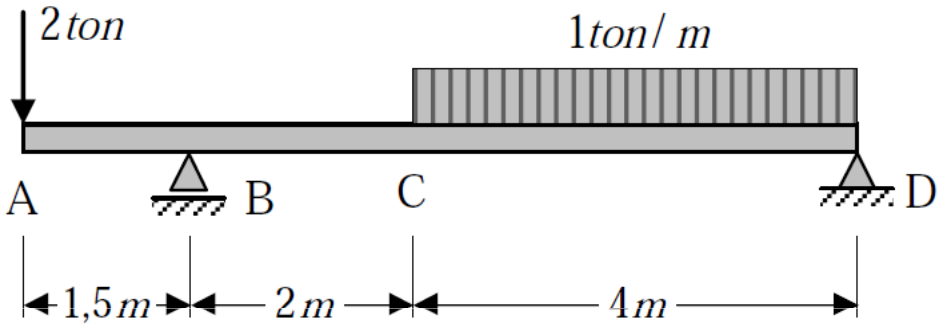
a) Usando o método de integração da elástica.

b) Usando o método da viga conjugada.



*Exercícios*

**6.2.4**. Considere uma viga (*E*, *I*) com 7,5m de comprimento, simplesmente apoiada em dois pontos e solicitada da forma indicada na figura a seguir:




a) Calcule as reacções nos apoios.

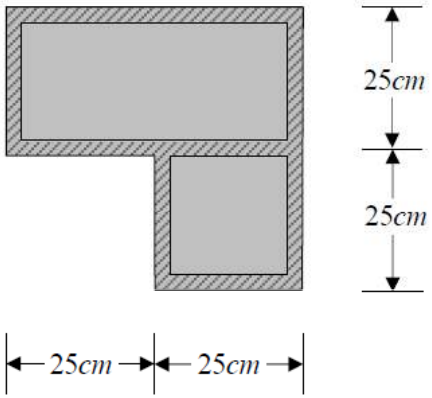
b) Determine os diagramas dos momentos flectores e dos esforços transversos ao longo do eixo da viga.

c) Determine, usando o método de integração da elástica, os valores da flecha na extremidade A e da rotação no apoio D.

# Aula #20

*Exercícios*

**4.2.13** Considere uma peça tubular de parede fina e espessura uniforme (*t*), com uma secção conforme está ilustrado na figura, construída em chapa de aço (G=80GPa). Tomando como irrelevante as diferenças entre as áreas dos contornos interiores e exteriores de cada célula:



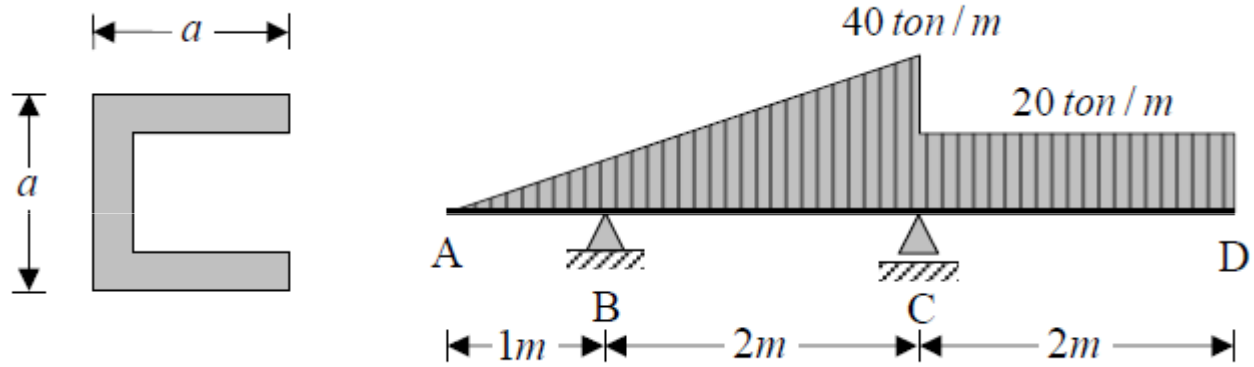

a) Deduza as expressões para as tensões de corte em cada um dos elementos da secção, em função do momento torsor aplicado e da espessura da chapa.

b) Calcule o valor mínimo que a espessura da chapa deve ter, para que a peça possa transmitir um momento torsor $M_t$=40 KNm, considerando $\tau_{adm}$=50MPa.

c) Para a situação considerada na alínea b), calcule o ângulo de torção por metro de comprimento.

*Exercícios*

**6.2.6** Pretende-se construir uma viga de secção em U, conforme representado na figura, com a altura igual à largura, a partir de chapa de aço ($E$=200 GPa, $\nu$=0.3), e espessura uniforme de 40mm. A viga está apoiada e é solicitada de acordo com o esquema representado na figura. Considere o valor de 200MPa para a tensão de flexão admissível do material. Determine:

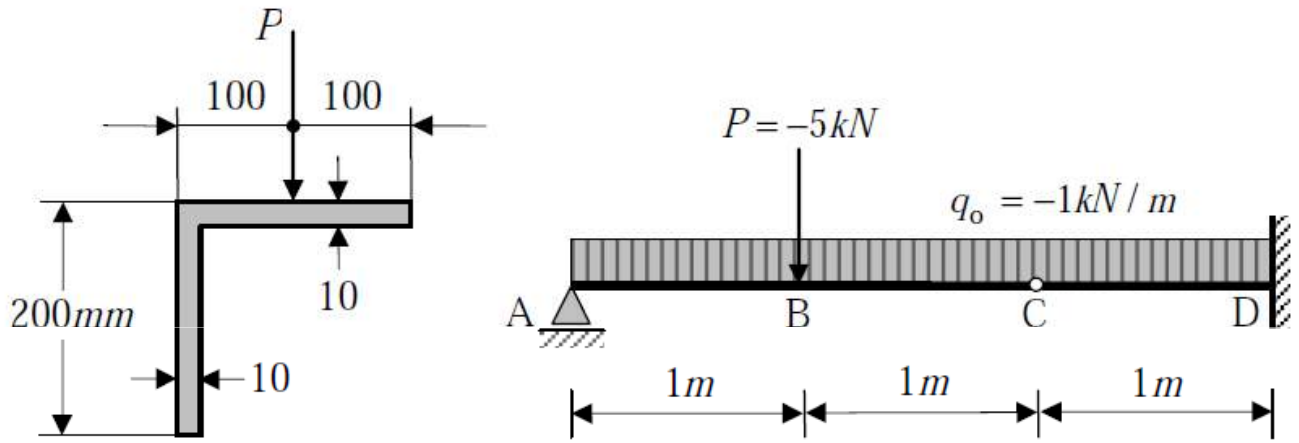



a) A dimensão mínima a da secção.
b) O centro de torção da secção.
c) O esforço rasante máximo que ocorre entre cada um dos elementos horizontais e o elemento vertical da secção.
d) A flecha nas extremidade A e D, e as rotações nos apoios B e C.

# Aula #21

*Exercícios*

**5.2.11** Considere uma viga de secção em *L*, com as dimensões e carregamento indicados na figura.




a) Determine a posição do centro de torção da secção.

b) Identifique as posições onde ocorrem as tensões máximas (normal e de corte) e calcule os respectivos valores numéricos.

# Aula #22

*Exercícios*

**3.2.12** Considere um corpo em aço (E=200GPa, v=0.3) sujeito a campo plano de tensões definido pelas seguintes componentes (em MPa):

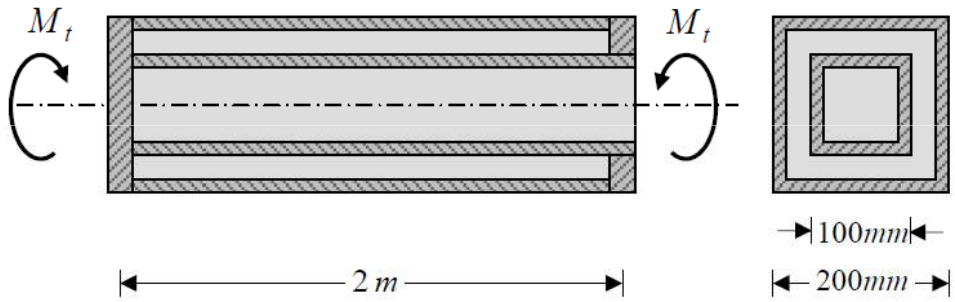
$$\sigma_{xx} = 100x + 100y - 200$$
$$\sigma_{yy} = -100x - 100y + 100$$
$$\tau_{xy} = 100x - 100y + 200$$

a) Calcule as tensões principais na origem das coordenadas e as respectivas direcções.

b) Calcule a variação de volume duma esfera com 1m de raio centrada na origem das coordenadas.

*Exercícios*

**4.2.10** Pretende-se transmitir um momento torsor $M_t$=40kNm através duma barra tubular em aço ($G$=80GPa), de comprimento $l$=2m, constituída por dois tubos de secções quadradas concêntricas de lados iguais a 200mm e 100mm, respectivamente, ambos em chapa de igual espessura ($t$) e ligados nos topos, conforme indicado na figura. A ligação na extremidade B deve ser tal que permita uma eventual diferença entre os deslocamentos axiais dos dois elementos.




a) Determine a espessura ($t$) da chapa, de modo que em nenhum dos elementos seja ultrapassada a tensão admissível do material $\tau_{adm}$=50MPa.

b) Para o valor da espessura da chapa calculado na alínea anterior, determine o ângulo de torção entre as duas secções extremas do tubo.

c) Reconsidere a alínea a), supondo agora que o elemento interior é em aço maciço.