1) A análise do comportamento dinâmico de um sistema assenta num modelo matemático desse sistema.
   a) Indicar e caracterizar, sucintamente, os modelos disponíveis em análise dinâmica de estruturas.
   b) Indicar quais as vias e respectivas metodologias para obtenção dos modos naturais de vibração de um sistema.
   c) Indicar duas formas expeditas de determinação por via experimental do amortecimento de um sistema vibratório.

2) As equações diferenciais do movimento de sistemas discretos e/ou contínuos podem ser estabelecidas através da utilização do princípio variacional de Hamilton.
   a) Caracterizar as equações do movimento dos sistemas discretos e contínuos.
   b) Enunciar o princípio variacional de Hamilton.
   c) Estabelecer as equações de Lagrange a partir do princípio variacional de Hamilton.

3) A resposta dinâmica de um sistema linear discreto pode ser determinada por análise modal ou por integração directa das equações do movimento.
   a) Referir, sucintamente, as vantagens e desvantagens destas técnicas.
   b) Justificar a utilização duma base modal truncada e referir os critérios básicos que condicionam a sua escolha.
   c) Classificar o método de integração por diferenças finitas e indicar a que critérios deve obedecer a selecção do passo de integração.

4) Para uma membrana quadrada de lado a, fixa nos 4 bordos,
   a) Escrever e caracterizar a equação diferencial do movimento e indicar as respectivas condições de fronteira.
   b) Esboçar as 4 primeiras formas naturais de vibração, indicando eventuais pontos e/ou linhas nodais, e comentar o valor das respectivas frequências naturais.

5) O método de Rayleigh e o método de Rayleigh-Ritz são métodos aproximados de determinação das frequências e formas naturais de vibração.
   a) Indicar em que princípio(s) assentam estes métodos.
   b) Apresentar uma análise comparativa entre os dois métodos.
   c) Indicar os requisitos das funções de aproximação a utilizar com estes métodos e situá-las no espaço funcional.

1) A figura representa uma viga encastrada-livre que foi sujeita a um teste de resistência vibratória por aplicação de uma aceleração $\ddot{y}_A$ ao apoio A.

A viga de comprimento 2ℓ possui uma secção recta com rigidez de flexão EI e com massa μ (massa por unidade de comprimento).

Para estudar o comportamento da viga durante o ensaio, esta é modelisada como um sistema linear discreto com 2 graus de liberdade conforme se representa na figura.

a) Determinar as matrizes de rigidez e de massa do sistema.

b) Escrever as equações do movimento em termos das coordenadas absolutas $x_i\ (i=1,2)$.

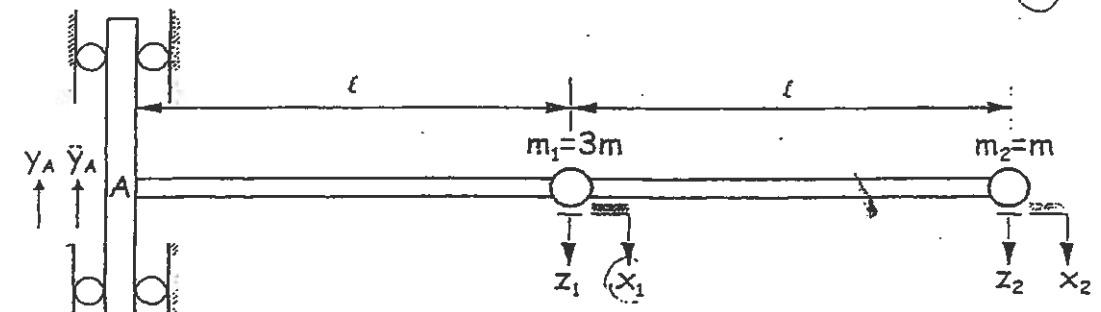
c) Escrever as equações do movimento em termos das coordenadas relativas $z_i\ (i=1,2)$.

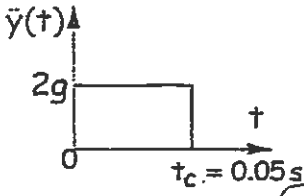
Fazendo m=1kg, $\ell = 0.5$m e $EI = \frac{7}{48} \times 10^4\ \text{Nm}^2$,

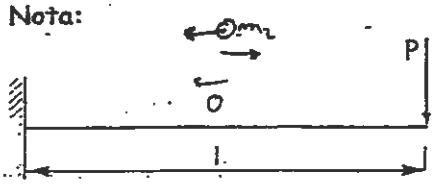
d) Determinar, ~~pela iteração de vectores~~, os modos naturais de vibração.

e) Determinar, por sobreposição modal, a resposta relativa à solicitação passiva representada.

f) Determinar a resposta relativa máxima para uma razão de amortecimento modal $\xi_r = 5\%, (r=1,2)$ e um tempo de actuação da solicitação passiva igual a $t_c = 0.05$s.







Nota:

$$y = \frac{P}{6EI}\left(3\ell x^2 - x^3\right)$$



$$m_1 \ddot{x}_1 = k_1(x_2 - x_1)$$

$$m_2 \ddot{x}_2 = k_2(x_1 - x_2)$$

$$m_1 \ddot{x}_1 + k_2(x_2 - x_1) - k_1(y_a - x_1) = 0$$

2) A figura representa uma viga apoiada numa extremidade e com duas molas lineares elásticas de rigidez k/2 na outra extremidade. A viga de comprimento ℓ possui secção recta com rigidez de flexão EI e massa por unidade de comprimento $\rho A = \mu$. Utilizando as funções de aproximação $V_1(x) = \sin\frac{\pi}{2\ell}x$ e $V_2(x) = \sin\frac{\pi}{\ell}x$,

a) Esboçar a representação gráfica das duas funções;
b) Classificar as funções dadas em termos da verificação da equação diferencial do movimento e das condições de fronteira.

Para $\ell = 1\,m$, $EI = 1\,Nm^2$, $\mu = 1\,kg/m$ e k=100 N/m,

c) Determinar, pelo método da energia de Rayleigh, uma estimativa da frequência natural fundamental;
d) Determinar, pelo método de Rayleigh-Ritz, uma estimativa das frequências naturais e das respectivas formas naturais;
e) Comentar os resultados obtidos nas alíneas c) e d).

