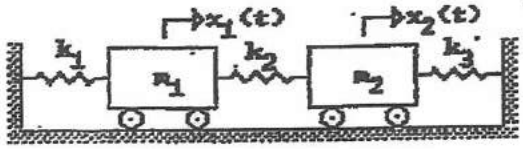
FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Vibrações de Sistemas Mecânicos

Exame de 2003-01-10
Parte teórica - 10 valores

1) Para um sistema vibratório, definir:
   a) frequência natural de vibração;
   b) frequência de ressonância de amplitude e de fase;
   c) batimento.

2) O amortecimento desempenha um papel importante no comportamento vibratório de um sistema mecânico.
   a) Caracterizar a influência do amortecimento do sistema na resposta a uma solicitação harmónica e transiente;
   b) Discutir a influência do amortecimento na eficiência do isolamento de vibrações;
   c) Indicar e caracterizar sucintamente dois métodos de determinação experimental do amortecimento de um sistema.

3) Os vectores modais representativos das formas naturais de vibração de um sistema linear discreto não amortecido e com dois graus de liberdade representado na figura são: $\{u\}_1^T = \{1 \quad 1.6\}^T$ e $\{u\}_2^T = \{1 \quad -0.8\}^T$.



   a) Definir modo natural e forma natural de vibração;
   b) Representar graficamente o movimento $x_1(t)$ e $x_2(t)$ das duas massas do sistema para o segundo modo natural de vibração;
   c) Indicar um conjunto de condições iniciais a aplicar ao sistema de modo que este responda com um movimento idêntico ao primeiro modo natural de vibração;
   d) Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\sin\omega t$, caracterizar a resposta do sistema e representar graficamente a respectiva amplitude de resposta, indicando eventuais pontos notáveis.

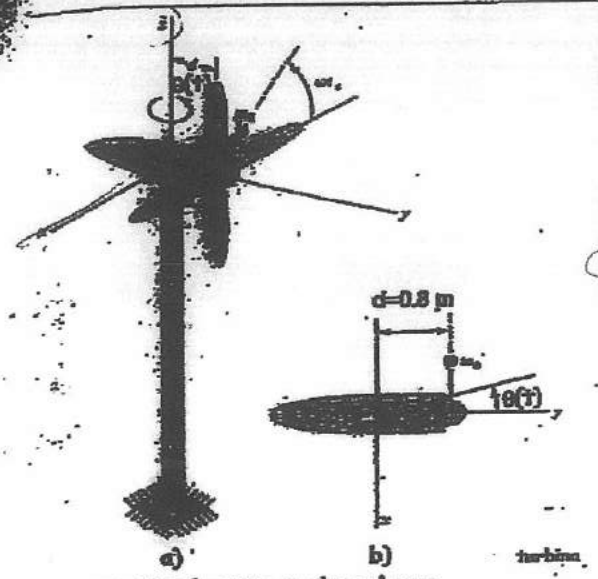
4) A análise do comportamento dinâmico de um sistema mecânico assenta num modelo matemático: modelo espacial, modelo modal e modelo de resposta em frequência.
   a) Caracterizar, justificando, as formas da energia potencial elástica e da energia cinética;
   b) O modelo de resposta em frequência pode ser determinado a partir do modelo espacial ou do modelo modal. Comentar.
   c) Representar graficamente a função de resposta em frequência directa de um sistema linear discreto com 3 graus de liberdade e as respectivas contribuições modais.

5) A resposta dinâmica de um sistema contínuo é determinada por análise ou sobreposição modal.
   a) Indicar a propriedade fundamental em que assenta esta técnica;
   b) Justificar a utilização de uma base modal truncada;
   c) Referir os critérios básicos que condicionam a escolha da base modal;
   d) Indicar em que condições específicas um determinado modo não contribui para a resposta do sistema.

6) O quociente de Rayleigh constitui um conceito relevante em análise de vibrações.
   a) Indicar as propriedades fundamentais do quociente de Rayleigh;
   b) Como justificar que uma aproximação porventura "grosseira" de uma forma natural de vibração conduza, através do quociente de Rayleigh, a uma boa aproximação da frequência natural correspondente?
   c) Indicar os valores limite do quociente de Rayleigh para os sistemas discretos e para os sistemas contínuos;
   d) Indicar os requisitos da aproximação a utilizar no quociente de Rayleigh para os sistemas discretos e para os sistemas contínuos.

FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica e Gestão Industrial
Vibrações de Sistemas Mecânicos

Exame de 2003-01-10
Parte prática - 10 valores



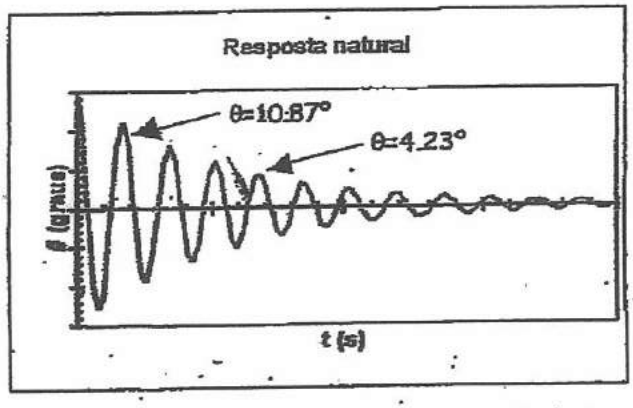
1) A turbina eólica representada na figura está suportada por uma coluna de rigidez torsional $k=9.6\times10^6$ Nm/rad e coeficiente de amortecimento c. O centro de massa do sistema rotor-pás da turbina de massa $m_0=1957$ kg encontra-se deslocado de uma distância "e" do eixo de rotação Oy do conjunto. O momento de inércia da turbina segundo o eixo Oz é $I_z=70$ kgm^2. A turbina roda a 250 rpm.

Desprezando os efeitos de flexão da coluna, determinar:

a) a equação diferencial do movimento de vibração de torção da coluna em torno do eixo Oz.

Num ensaio em regime livre registou-se a resposta θ(t) do sistema que se representa na figura. Determinar:

b) a razão de amortecimento ξ e a constante de amortecimento c_t da coluna;



c) a frequência natural amortecida ω_d;

d) a excentricidade máxima "e" de modo a que em regime permanente a amplitude de vibração não exceda 2.5°.

e) a expressão do momento torsor transmitido à base da coluna de suporte.

2) Um veio de dois tramos está fixo em $x=0$ e livre em $x=\ell$, e a secção recta apresenta um momento polar $2I_p$ para $0\le x<\frac{\ell}{3}$ e I_p para o tramo $\frac{\ell}{3}<x<\ell$. O material do veio possui módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. Utilizando as funções de aproximação $\Theta_1(x)=\sin\frac{\pi x}{2\ell}$ e $\Theta_2(x)=\sin\frac{3\pi x}{2\ell}$,

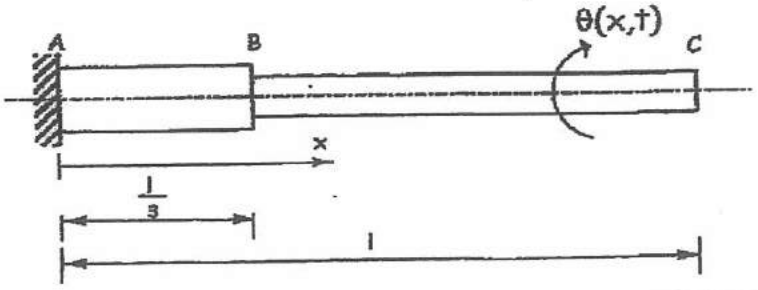
a) Esboçar a representação gráfica das duas funções de aproximação e classificá-las;

b) Determinar, pelo método da energia de Rayleigh, uma estimativa da frequência natural fundamental de torção;

c) Determinar, pelo método de Rayleigh-Ritz, uma estimativa das frequências naturais e das respectivas formas naturais de vibração de torção;

d) Estabelecer a equação de frequências naturais de vibração de torção.

e) Aproximando o veio representado por um veio de secção constante de momento polar I_p, determinar a resposta $\theta(x,t)$ para um momento torsor $M_t(t)=M_0\sin\omega t$ aplicado na extremidade $x=\ell$.



Exame - 2003 - 01 - 10

Parte Teórica

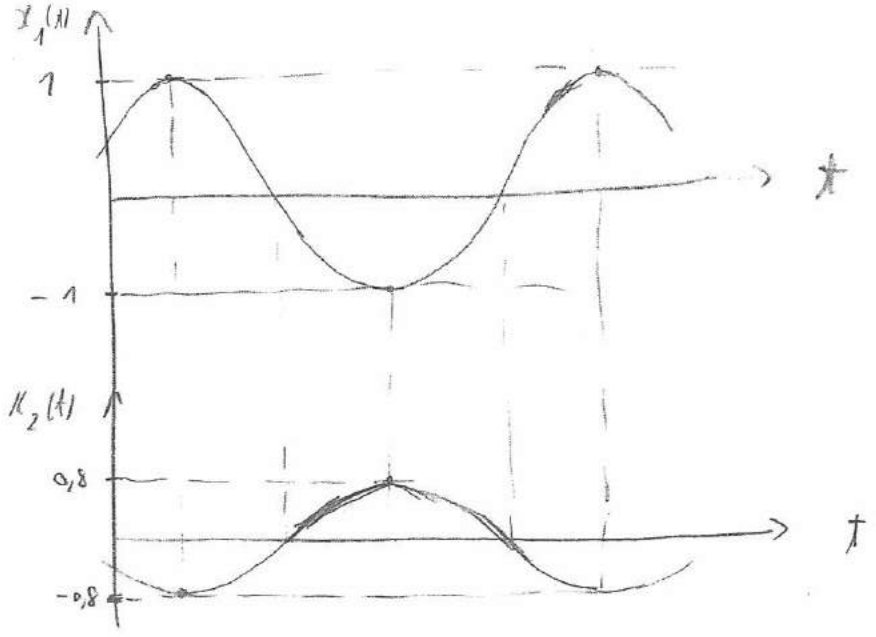
3. a) Modo Natural:

É um dos n movimentos harmónicos síncronos $\{x(t)\}_i$ com $i = 1, \dots, n$ caracterizados pelas frequências naturais ω_i com $i = 1, \dots, n$ e pelos n-vectores modais $\{u\}_i$ $i = 1, \dots, n$, que são solução do problema característico.

Forma Natural:

Configuração espacial assumida pelo sistema, que é representada por um vector modal $\{u\}_i$ $i = 1, \dots, n$ associada a uma frequência natural ω_i $i = 1, \dots, n$.

b) $$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,8 \end{Bmatrix} \cos(\omega_2 t - \phi_2)$$

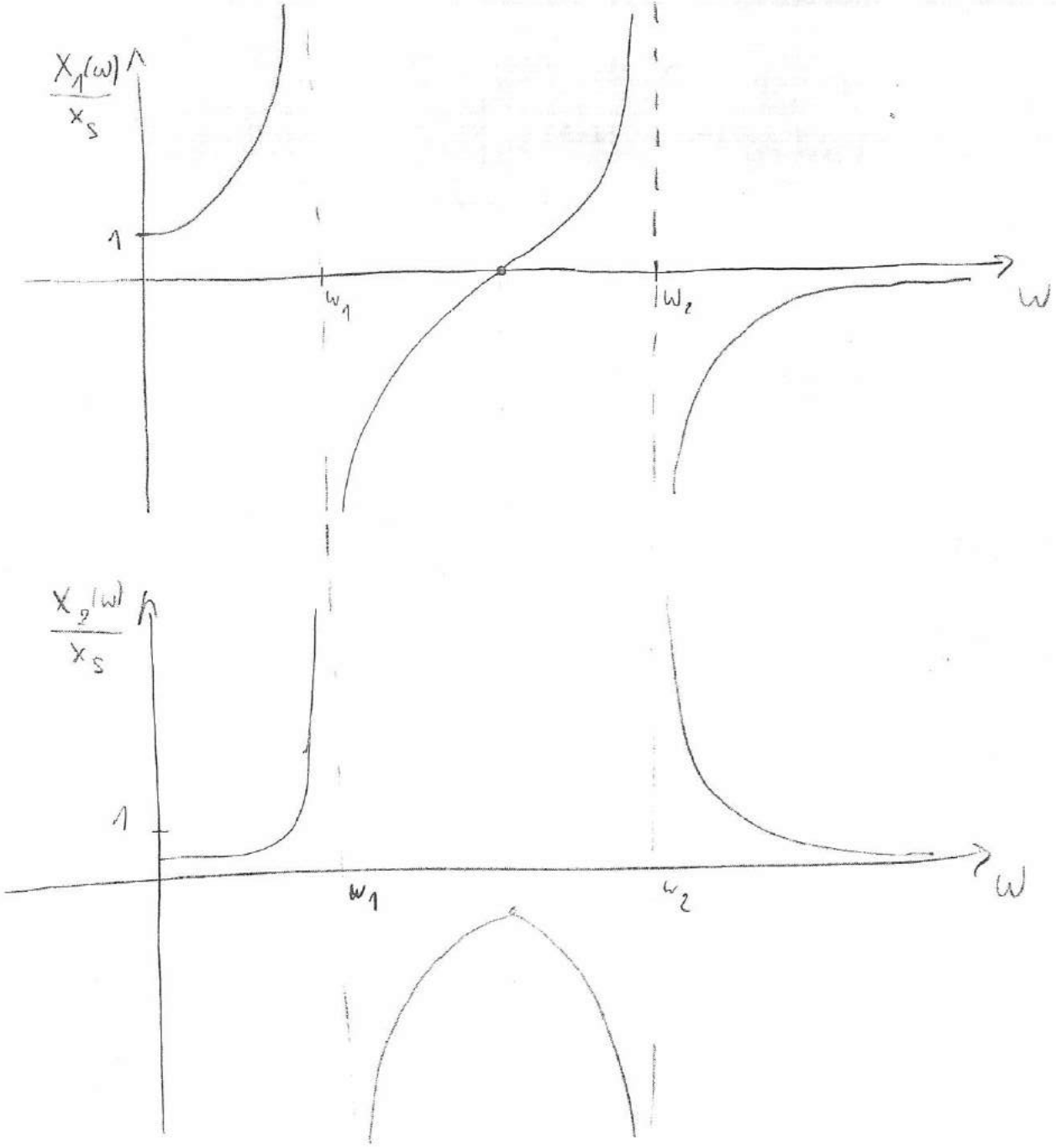


c)

$$\{X_0\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}6 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \{\dot{X}_0\} = \{0\} \quad ; \quad \{f(t)\} = \{0\}$$

(regime livre)

d)



Assumi que $f(t)$ estava aplicada em (1).

Caracterização:

- $\omega < \omega_1$ movimento em fase
- $\omega_1 < \omega < \omega_2$ movimento em fase e em oposição de fase

. $w > w_2$ movimento em oposição de fase

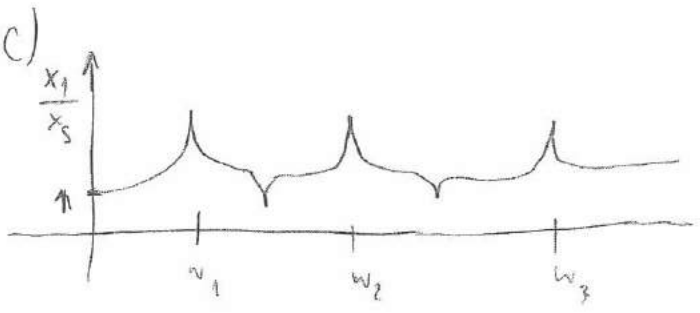
. Existe um valor particular de w para o qual $X_1(w)$ é nulo.

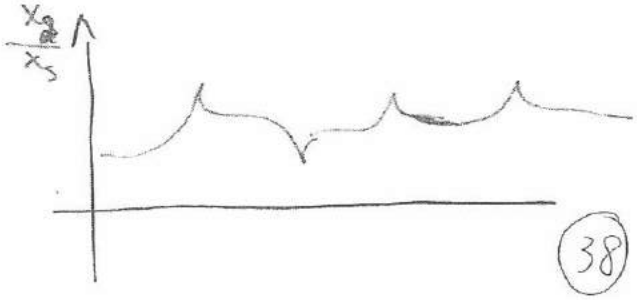
4. a) A energia cinética é uma forma quadrática definida positiva uma vez que é calculada a partir da matriz de massa (do quadrado das velocidades, sendo a matriz de massa definida positiva.

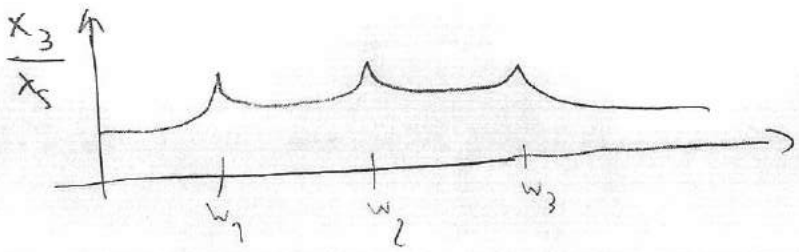
A energia potencial é uma forma quadrática, geralmente, definida positiva mas que no caso de sistemas semi-definidos passa a ser semi-definida positiva (dem alguns valores próprios nulos). Isto porque a matriz de rigidez é semi-definida positiva para estes casos.

b) É verdade porque qualquer um dos modelos permite a obtenção da resposta como sendo uma entidade complexa e como tal permite o seu traçado em magnitude e fase em função da frequência

c)







A influência de cada modo faz-se sentir quando w está mais próximo da sua frequência natural associada.

5. a) A propriedade fundamental em que se baseia a técnica de sobreposição modal é a ortogonalidade das formas naturais dos modos modais, uma vez que é esta propriedade que garante que os vectores modais são linearmente independentes e que, portanto, a sua combinação linear pode descrever qualquer vector no espaço de dimensão n (sendo n o nº de vectores modais).

b) Utiliza-se uma base modal truncada porque ao se seleccionar os modos mais influentes na resposta do sistema e se eliminar os restantes o esforço computacional é muito reduzido.

c) Escolha dos modos de mais baixa energia (mais baixa frequência) e, em particular, escolha dos modos associados a frequências naturais próximas das frequências de excitação.

d) No caso de solicitações concentradas coincidirem com os nodos desse modo ou no caso de uma deformação inicial que seja a combinação de um ou mais

vectores modais combinados sem incluir o modo em causa e o movimento ser em regime livre.

6. a) . O quociente de Rayleigh é um majorante da frequência fundamental;
. Apresenta um valor estacionário na vizinhança das formas naturais

b) Pela 2ª propriedade atrás enunciada.

c) Sistemas discretos:

$$w_1^2 \leq R(\{v\}) \leq w_n^2$$

Com w_1 sendo a freq. fundamental e w_n sendo a frequência natural do último modo de vibração.

Sistemas contínuos:

$$w_1^2 \leq R(\{v\})$$

Não há limite superior porque $w \longrightarrow \infty$

d) Para os sistemas discretos o vector $\{v\}$ pode ser qualquer vector não nulo, sendo que quanto mais próximo ele for da forma modal da frequência natural que se quer calcular, melhor é a aproximação.

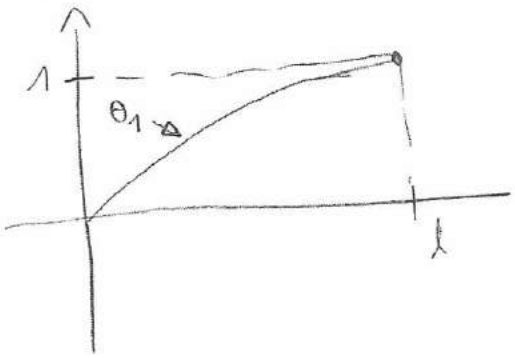
Para os sistemas contínuos há 2 abordagens: forma forte e forma fraca. Na forte as funções de

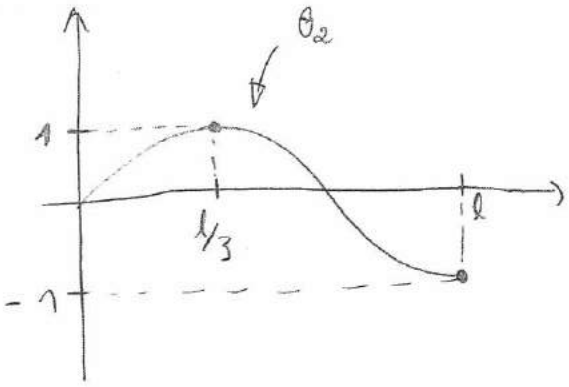
aproximação designam-se funções teste. (têm de ser deriváveis um nº de vezes igual à ordem do sistema e têm de obedecer às condições fronteira). Na forma fraca designam-se funções admissíveis e têm de ser deriváveis um nº de vezes igual a metade da ordem do sistema e têm de verificar apenas as condições fronteira geométricas.

Parte Prática

2. a) $\theta_1 \rightarrow T = \frac{2\pi}{\pi/2l} = 4l$

$\theta_1 \rightarrow T = \frac{2\pi}{3\pi/2l} = \frac{4l}{3}$





Ambas as funções são deriváveis sempre.

Condições fronteira:

$$\theta_1(x)\Big|_{x=0} = 0 \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{2l}\cdot 0\right) = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{d\,\theta_1(x)}{dx}\Big|_{x=l} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\pi}{2l}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2l}\,l\right) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \quad 0 = 0$ logo trata-se de uma função teste.

$$\theta_2(x)\Big|_{x=0} = 0 \Rightarrow \sin\left(\frac{3\pi}{2l}\times 0\right) = 0 \quad \checkmark$$

$$\frac{d\,\theta_2(x)}{dx} = 0 \Rightarrow \left(\frac{3\pi}{2l}\right)\cos\left(\frac{3\pi}{2l}\,l\right) = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

b) Utilizar-se-á θ_1 por ser mais próxima da forma fundamental.

En. potencial:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l G I_p(x)\left(\frac{d^2\theta_1(x)}{dx^2}\right)^2 dx + \cancel{V_{cfm}}^{0} =$$

$$= \frac{2GI_p}{2}\int_0^{\frac{l}{3}} \left(-\frac{\pi^2}{2l}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right)^2 dx + \frac{GI_p}{2}\int_{\frac{l}{3}}^{l}\left(-\frac{\pi^2}{2l}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2l}x\right)\right)^2 dx =$$

$$= GI_p\left(\frac{-3\pi^3\sqrt{3}+2\pi^4}{48l} - 0\right) + \frac{GI_p}{2}\left(\frac{\pi^4}{8l} - \frac{-3\pi^3\sqrt{3}+2\pi^4}{48l}\right) =$$

$$= GI_p\left(\frac{\pi^4}{16l} + \frac{-1{,}5\pi^3\sqrt{3}+\pi^4}{48l}\right)$$

En. Cinética:

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho I_p\left(\theta_1(x)\right)^2 dx + \cancel{T_{cfm}}\right) =$$

$$= \omega^2\left(\frac{2\rho I_p}{2}\int_0^{l/3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2l}x\right)^2 dx + \frac{\rho I_p}{2}\int_{l/3}^{l}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2l}x\right)^2 dx\right) =$$

$$= \omega^2\left(\rho I_p\left(\frac{-l(3\sqrt{3}-2\pi)}{12\pi} - 0\right) + \frac{\rho I_p}{2}\left(\frac{l}{2} - \frac{-l(3\sqrt{3}-2\pi)}{12\pi}\right)\right) =$$

$$= \omega^2\left(\rho I_p\left(\frac{l}{4} + \frac{-l(1{,}5\sqrt{3}-\pi)}{12\pi}\right)\right)$$

$$R(\theta(x)) = \omega^2 = \frac{G I_R \left(\frac{\pi^4}{16\ell} + \frac{-1{,}5\pi^3\sqrt{3} + \pi^4}{48\ell} \right)}{\ell I_R \left(\frac{1}{4} + \frac{-\ell(1{,}5\sqrt{3} - \pi)}{12\pi} \right)} =$$

$$= \left(\frac{G}{\ell}\right) \frac{\frac{3\pi^4 - 1{,}5\pi^3\sqrt{3}}{48\ell}}{\frac{4\pi\ell - 1{,}5\ell\sqrt{3}}{12\pi}} = c^2 \cdot \frac{3\pi^3 - 1{,}5\pi^2\sqrt{3}}{16\pi\ell^2 - 6\ell^2\sqrt{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \omega = c \cdot \sqrt{\frac{3\pi^3 - 1{,}5\pi^2\sqrt{3}}{16\pi\ell^2 - 6\ell^2\sqrt{3}}}$$

c) Não faz

d) O meio tem 2 trocos de secção constante.

$$\theta_1(x,t) = \left(A_1 \cos\frac{\omega}{c}x + B_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\theta_1(x,t) = \left(A_2 \cos\frac{\omega}{c}x + B_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\frac{\partial\theta_1(x,t)}{\partial x} = \frac{\omega}{c}\left(-A_1 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x + B_1\cos\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

$$\frac{\partial\theta_2(x,t)}{\partial x} = \frac{\omega}{c}\left(-A_2 \operatorname{sen}\frac{\omega}{c}x + B_2\cos\frac{\omega}{c}x\right)\left(C\cos\omega t + D\operatorname{sen}\omega t\right)$$

Cond. fronteira:

$$\theta_1(x,t)\Big|_{x=0} = 0 \iff \boxed{A_1 = 0}$$

$$\frac{\partial \theta_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l} = 0 \iff -A_2 \operatorname{sen}\frac{w}{c} l + B_2 \cos\frac{w}{c} l = 0 \iff \boxed{B_2 = A_2 \operatorname{tg}\frac{w}{c} l}$$

$$\theta_1(x,t)\Big|_{x=\frac{l}{3}} = \theta_2(x,t)\Big|_{x=\frac{l}{3}} \iff B_1 \operatorname{sen}\frac{w}{c}\frac{l}{3} = A_2 \cos\frac{w}{c}\frac{l}{3} + B_2 \operatorname{sen}\frac{w}{c}\frac{l}{3} \iff$$

$$\iff B_1 = A_2 \operatorname{cotg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + B_2 \implies \boxed{B_1 = A_2\left(\operatorname{cotg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + \operatorname{tg}\frac{w}{c} l\right)}$$

$$G 2I_p \frac{\partial \theta_1(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{l}{3}} = G I_p \frac{\partial \theta_2(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=\frac{l}{3}} \iff 2 B_1 \cos\frac{w}{c}\frac{l}{3} =$$

$$= -A_2 \operatorname{sen}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + B_2 \cos\frac{w}{c}\frac{l}{3} \iff 2B_1 = -A_2 \operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + B_2 \implies$$

$$\implies 2B_1 = A_2\left(-\operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + \operatorname{tg}\frac{w}{c} l\right) \iff \boxed{B_1 = \frac{A_2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{w}{c} l - \operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3}\right)}$$

Então:

$$\frac{A_2}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{w}{c} l - \operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3}\right) = A_2\left(\operatorname{cotg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + \operatorname{tg}\frac{w}{c} l\right) \iff$$

$$\iff \boxed{2\operatorname{cotg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} + \operatorname{tg}\frac{w}{c} l + \operatorname{tg}\frac{w}{c}\frac{l}{3} = 0}$$

eq. das frequências naturais de vibração de torção.

e) Não sai.