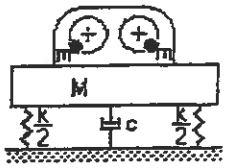
Exame de 2003-02-05
Parte teórica - 10 valores

1) O equipamento representado na figura possui dois discos que rodam em sentidos contrários com uma velocidade angular ω constante, e cujos centros de massa distam de e do seu centro de rotação. O sistema possui uma razão de amortecimento viscoso $\xi \cong 10\%$.



a) Caracterizar a excitação e o movimento vibratório do equipamento.

b) Representar o factor de amplificação dinâmica μ e o ângulo de fase ϕ em função da razão de frequência $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$. Indicar na figura o lugar geométrico dos valores correspondentes às frequências natural e de ressonância.

c) Representar a amplitude da força $f_T(t)$ transmitida ao apoios em função da razão de frequência $\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$. Indicar na figura eventuais pontos notáveis.

d) Discutir a eficiência do isolamento em função dos parâmetros M, k e c para uma determinada frequência de funcionamento.

2) Os transdutores de vibração permitem medir o deslocamento ou a aceleração do estado vibratório de um sistema mecânico.

a) Indicar quais os elementos constituintes de um transdutor de vibrações e qual o seu princípio de funcionamento;

b) Representar as características de transmissibilidade e indicar as gamas de frequência de funcionamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

c) Caracterizar, justificando, o atravancamento dos transdutores de deslocamento e de aceleração.

3) A análise do comportamento dinâmico de um sistema consiste na determinação das suas propriedades dinâmicas e/ou na determinação da resposta a determinado tipo de solicitação.

a) Definir função de resposta em frequência e indicar quais as variantes existentes.

b) Indicar e caracterizar sucintamente as principais formas de representação da função de resposta em frequência.

c) Definir espectro de reposta (ou de choque) e justificar a sua utilização em análise dinâmica de estruturas.

d) Justificar a utilização do modelo não amortecido do sistema com um grau de liberdade no estabelecimento de espectros de choque para diferentes transientes.

4) As equações do movimento de um sistema linear discreto não amortecido são do tipo $[m]\{\ddot{q}(t)\} + [k]\{q(t)\} = \{f(t)\}$.

a) Definir coordenadas generalizadas e coordenadas naturais ou modais.

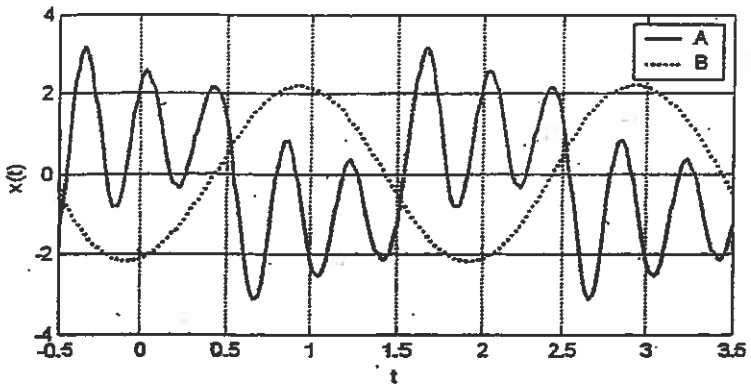
b) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez.

c) Definir modo natural e forma natural de vibração.

d) Indicar e escrever as propriedades mais relevantes dos vectores modais.

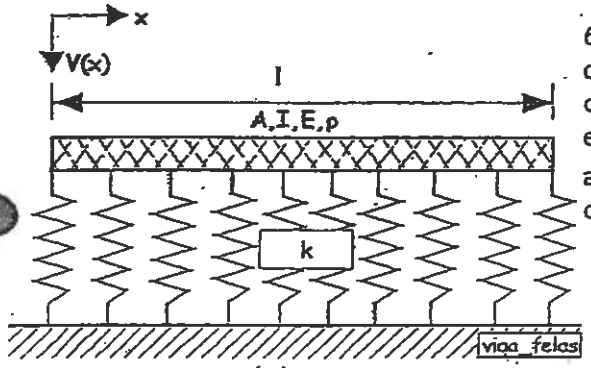
e) Sendo o vector $\{u\}_r$ uma das formas naturais de vibração, demonstrar que a resposta em regime livre a condições iniciais $\{q(0)\} = \{u\}_r$ e $\{\dot{q}(0)\} = \{0\}$ é uma oscilação harmónica de frequência ω_r e de configuração espacial $\{u\}_r$.

92



5) A figura representa a resposta no tempo de dois sistemas vibratórios A e B distintos a uma mesma solicitação periódica,

a) Comentar.



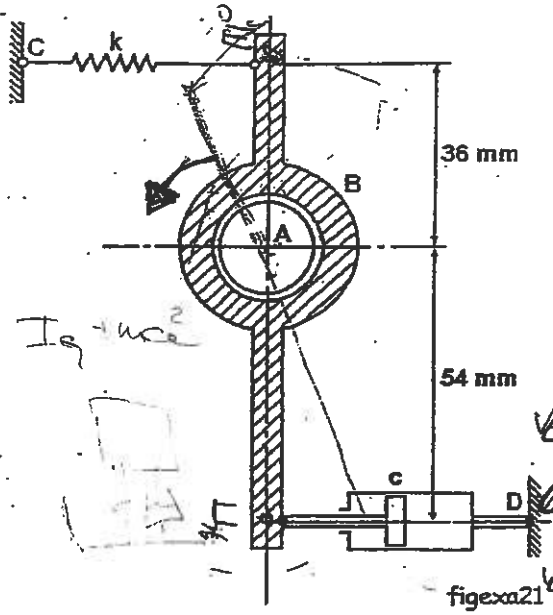
6) A figura representa uma viga de comprimento ℓ, cuja secção recta apresenta uma área A e momento de 2ª ordem I, e cujo material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. A viga está apoiada sobre uma fundação linear elástica de rigidez distribuída e uniforme de valor k.

a) Estabelecer e caracterizar a equação diferencial do movimento do sistema.

b) Escrever as condições de fronteira que devem ser verificadas pelas formas naturais de vibração $V_r(x)\ r=1,2,\ldots,\infty$.

c) Estabelecer o problema característico associado cujas soluções constituem os modos naturais de vibração, $(\omega_r; V_r(x))\ r=1,2,\ldots,\infty$.

Exame de 2003-02-05
Parte prática - 10 valores



figexa21

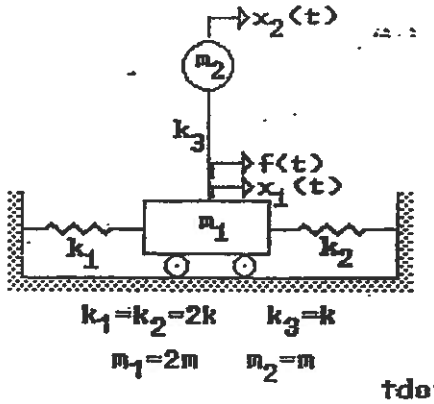
1) O corpo representado na figura oscila em torno do ponto A, sendo o seu movimento controlado por uma mola linear de rigidez k e um amortecedor viscoso de constante c.
Num ensaio em regime livre, o sistema responde com uma vibração livre amortecida de frequência igual a 2 Hz, medindo-se os seguintes valores da vibração:
- 1ª oscilação: $\theta_1 = 10°$;
- 3ª oscilação: $\theta_2 = 0.62°$.

Sabendo que a rigidez da mola é de 126 Nm^{-1}, determinar:

a) o decremento logarítmico δ e a razão de amortecimento ξ;
b) a frequência natural angular não amortecida ω_n;
c) o momento de inércia I_A do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto A;
d) o valor da constante c do amortecedor;

Admitindo que o sistema é excitado por um momento aplicado em A, $M_A(t) = M_m \cos(\omega t)$, com $M_m = 0.1$ Nm, determinar:

e) a frequência de excitação ω para a qual a amplitude de resposta é $\Theta(\omega) = 5°$.
f) a reacção no apoio A.

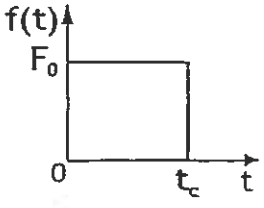


tdof14

2) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.
As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera respectivamente.

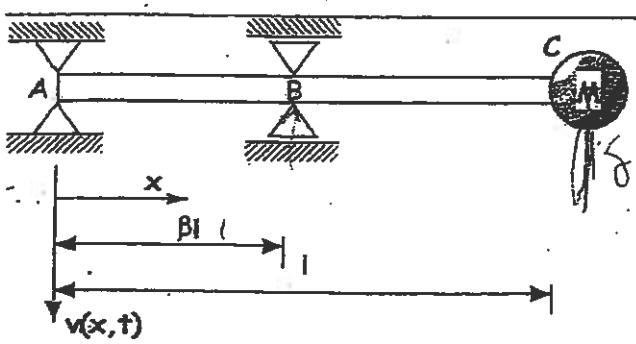
a) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.
b) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.
c) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

Para $k = 200$ Nm^{-1} e $m = 2$ kg,



d) Determinar o valor máximo da resposta $x_1(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.148$ s
e) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ da resposta da massa m_1 quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 14.4$ $rads^{-1}$.
f) Redimensionar a rigidez k_3 da barra de modo que a amplitude $X_1(\omega)$ da massa m_1 seja nula.

Exame de 2003-02-05
Parte prática - 10 valores



3) A viga representada na figura encontra-se simplesmente apoiada em A e B, comporta uma massa concentrada M na extremidade C e possui uma secção recta uniforme de área A e de momento de 2ª ordem I. O material da viga possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ.
Pelo método da energia de Rayleigh e admitindo para a forma fundamental de vibração lateral (flexão) a deformada $V(x) = ax^2 + bx + c$,

determinar:

a) as constantes a, b e c para um deslocamento lateral δ em $x = \ell$;
b) a energia potencial máxima e a energia cinética máxima;
c) a estimativa da frequência fundamental de vibração. Comentar o resultado.
d) Esboçar a variação da frequência fundamental para $\beta \in [0,1]$.
e) Discutir o resultado obtido na alínea anterior com M=0, para os valores limite β=1 e β=0. Comparar os valores obtidos com as respectivas frequências fundamentais exactas. Sugestão: exprimir o resultado da alínea anterior na forma $\omega = \omega_0 x f(\beta)$.
f) Sugerir uma função de aproximação de tipo harmónico para o problema.

c.f.

$$v(0,t) = 0$$

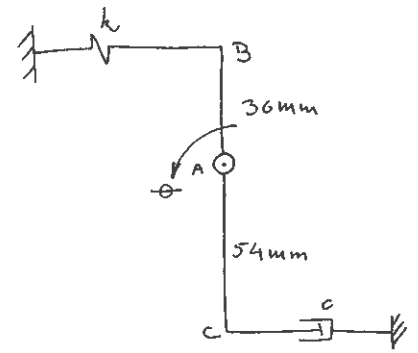
$$v(\beta l, t) = 0$$

$$EI \frac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3} = mg$$

$$EI \frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2} = 0$$

Exame 5/2/2003

1.



$f_d = 2\ Hz \rightarrow \omega_d = 4\pi\ rad/s = 12,56\ rad/s$

$\theta_1 = 10° \rightarrow t_1$

$\theta_2 = 0,62° \rightarrow t_2 = t_1 + 3T$

$k = 126\ N/m$

a) $\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2 = t_1 + NT)} = \frac{1}{3} \ln \frac{10}{0,62} = 0,927$

b) $\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0,927}{\sqrt{4\pi^2 + 0,927^2}} = 0,146$

$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \xi^2}} = \frac{4\pi}{\sqrt{1 - 0,146^2}} = 12,7\ rad/s$

c) $\sum M_A = I_A \ddot{\theta}$

$I_A \ddot{\theta} + 0,054^2 c \dot{\theta} + 0,036^2 k \theta = 0$

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{0,036^2 k}{I_A}} \Leftrightarrow I_A = \frac{0,036^2 k}{\omega_n^2} = \frac{0,036^2 \cdot 126}{12,7^2} = 1,012 \cdot 10^{-3}\ N\,m^2$

d) $\xi = \frac{c}{2 m \omega_n} \Rightarrow c = 0,146 \cdot 2 \cdot 1,012 \cdot 10^{-3} \cdot 12,7 = 3,75 \cdot 10^{-3}\ kg/s$

e) $M_A(t) = M_m \cos \omega t \ ; \ M_m = 0,1\ N\,m \qquad \omega = ? \longrightarrow \Theta(\omega) = 5°$

$\Theta(\omega) = \frac{M_m / 0,036^2 k}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{0,1 / 0,036^2 \cdot 126}{\sqrt{\beta^4 + (4\xi^2 - 2)\beta^2 + 1}} = 5$

$\beta^4 + (4\xi^2 - 2)\beta^2 + 1 = 0,015$ pq $\beta > 0$ → $\beta_1^2 =$ $\beta_2^2 =$

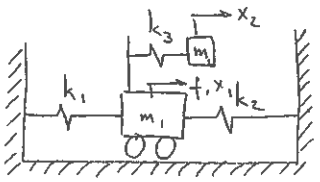
f) $R_A = F_k - F_c = k \cdot 0,036\,\theta - c\dot{\theta} \cdot 0,054$

$\theta(t) = \Theta(\omega) \cdot \cos(\omega t)$

$\dot{\theta}(t) = -\omega\,\Theta(\omega) \operatorname{sen}(\omega t)$

$R_A = (0,036\,k \cos \omega t + 0,054 \cdot \omega\, c \cdot \operatorname{sen} \omega t)\,\Theta(\omega)$

2.



$k_1 = k_2 = 2k$

$k_3 = k$

$m_1 = 2m$, $m_2 = m$

a)

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 \quad ; \quad V = \frac{1}{2}(k_1+k_2)x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 (x_1 - x_2)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{x_1}}\right) = m_1 \ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial V}{\partial q_{x_1}} = (k_1+k_2)x_1 + k_3(x_1 - x_2) = (k_1+k_2+k_3)x_1 - k_3 x_2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{x_2}}\right) = m_2 \ddot{x}_2 \qquad \frac{\partial V}{\partial q_{x_2}} = -k_3(x_1 - x_2) = -k_3 x_1 + k_3 x_2$$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1+k_2+k_3)x_1 - k_3 x_2 \\ m_2 \ddot{x}_2 - k_3 x_1 + k_3 x_2 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b)

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 5k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - m\omega^2 \end{vmatrix} = 5k^2 - (5mk + 2mk)\omega^2 + 2m^2\omega^4 - k^2 = 0$$

$$2m^2\omega^4 - 7mk\omega^2 + 4k^2 = 0$$

$$\frac{7mk \pm \sqrt{49m^2k^2 - 32m^2k^2}}{4m^2} = \frac{k}{m}\left(\frac{7 \pm \sqrt{17}}{4}\right) = \begin{cases} \omega_1^2 = 0{,}719\ \frac{k}{m} \\ \omega_2^2 = 2{,}78\ \frac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0{,}848\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1{,}67\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 5k - 2m \cdot 0{,}719\frac{k}{m} & -k \\ -k & k - m \cdot 0{,}719\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 3{,}562 u_{11} - u_{21} = 0 \\ -u_{11} + 0{,}281 u_{21} = 0 \end{cases} \quad \frac{u_{11}}{u_{21}} = 0{,}281 \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}281 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 5k - 2m \cdot 2{,}78\frac{k}{m} & -k \\ -k & k - m \cdot 2{,}78\frac{k}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Bmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -0{,}56 u_{12} - u_{22} = 0 \\ -u_{12} - 1{,}78 u_{22} = 0 \end{cases} \quad \frac{u_{12}}{u_{22}} = -1{,}78 \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -1{,}78 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c)

$$\{\phi\} = \frac{1}{\sqrt{\{u\}^T [m] \{u\}}} \{u\}$$

$$\phi_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}261 \\ 0{,}929 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \qquad \phi_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}657 \\ 0{,}369 \end{Bmatrix} \frac{1}{\sqrt{m}} \qquad [\Phi] = \begin{bmatrix} 0{,}261 & -0{,}657 \\ 0{,}929 & 0{,}369 \end{bmatrix}$$

$$[I]\{\ddot{\eta}\} + [\Omega^2]\{\eta\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1 + 0{,}719\frac{k}{m}\eta_1 = 0{,}261 f(t) \\ \ddot{\eta}_2 + 2{,}78\frac{k}{m}\eta_2 = 0{,}929 f(t) \end{cases}$$

d) Para 1 dist de 1GDL em reg forçado transiente a resposta ao degrau é

$t_c = 0{,}149$ s , $k = 200$ N/m , $m = 2$ kg

$$\omega_1 = 0{,}848\sqrt{\frac{200}{2}} = 8{,}48 \text{ rad/s} \qquad \frac{\pi}{\omega_1} = 0{,}370 \qquad t_c < \frac{\pi}{\omega_1} \rightarrow X'_{max}(t) = 2\frac{f_0}{k}\operatorname{sen}\frac{\omega t_c}{2} = 2\frac{0{,}261 f_0}{0{,}719\frac{200}{2}}$$

d) $t_c = 0{,}148\ s \quad k = 200\ N/m \quad m = 2\ kg \quad x_1(t)_{max} = ?$

$$\ddot{\eta}_1 + 0{,}719 \frac{k}{m} \eta_1 = 0{,}261\ f(t)$$

$$\omega_1 = 0{,}848 \sqrt{\frac{k}{m}} = 0{,}848 \sqrt{\frac{200}{2}} = 8{,}48\ rad/s$$

$$\ddot{\eta}_1 + 71{,}9\ \eta_1 = 0{,}261\ f(t)$$

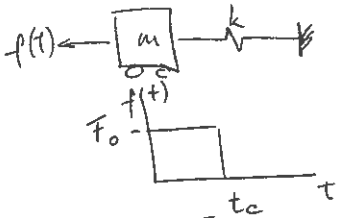
$$\frac{\pi}{\omega_1} = \frac{\pi}{8{,}48} = 0{,}37 \qquad t_c < \frac{\pi}{\omega_1} \ \checkmark$$

$$x_{máx}(t) = 2 \cdot \frac{0{,}261 F_0}{71{,}9} \operatorname{sen}(8{,}48 \cdot 0{,}148 / 2)$$

$$x_{máx}(t) = 4{,}26 \cdot 10^{-3} F_0 \ m = 4{,}26\ F_0\ mm$$

$f(t) = F_0\ h(t - t_c)$

Para um sistema 1GDL



$$x_{max}(t) = 2 \frac{F_0}{k} \operatorname{sen}\left(\omega_n \frac{t_c}{2}\right) ; \ t >$$

$$t_c < \frac{\pi}{\omega_n}$$

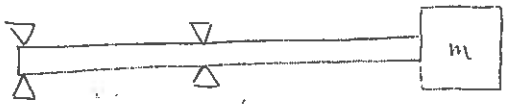
e) Se $f(t) = F \cos \omega t$; $\omega = 14{,}4\ rad/s$

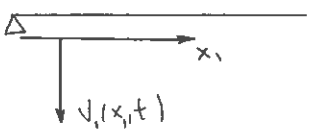
$$[Z]\,|x| = |F|$$

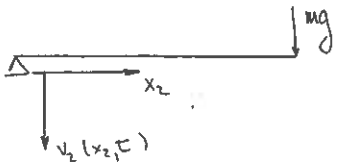
$$\begin{bmatrix} 5 \cdot 200 - 2 \cdot 2 \cdot 14{,}4^2 & -200 \\ -200 & 200 - 2 \cdot 14{,}4^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$X_1 = \frac{Z_{22} F_1 - Z_{12} F_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} = \frac{-214{,}72 \cdot F}{-170{,}56 \cdot 214{,}72 - 200 \cdot 200} = 2{,}8 \cdot 10^{-3} F \ m = 2{,}8\ F\ mm$$

3.







$V(x) = ax^2 + bx + c$

a) $x = l \; ; \; V(x) = \delta$

$a l^2 + b l + c = \delta$

$a l^2 + bl = \delta$

$x = 0 \quad V(x) = 0$

$\cancel{a 0} + \cancel{b 0} + \boxed{c = 0}$

$x = \beta l \quad V(x) = 0$

$a(\beta l)^2 + b(\beta l) = 0$

$a = -\frac{b}{\beta l}$

$-\frac{b}{\beta \cancel{l}} \cdot l^2 + bl = \delta$

$b = \frac{\beta \delta}{l(\beta - 1)}$

$a = \frac{-\cancel{\beta}\delta}{l(\beta-1)\beta\cancel{l}} = \frac{-\delta}{l^2(\beta-1)}$

$V(x) = -\frac{\delta}{l^2(\beta-1)} x^2 + \frac{\beta\delta}{l(\beta-1)} x$