Exame Especial de Vibrações FEUP - DEMEGI 23 de Dezembro de 2005
COM CONSULTA de UM TEXTO DE APOIO 2.15

1.

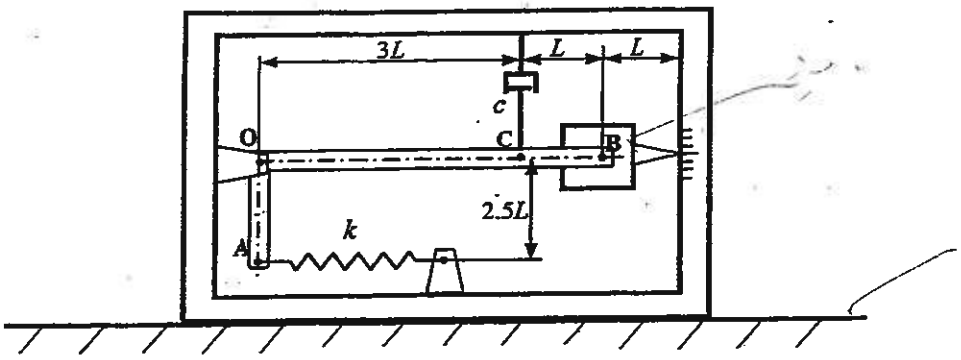


Figura 1

O desenho (Figura 1) representa um instrumento para medir a amplitude do deslocamento vertical de vibração de uma superfície. O instrumento é constituído por:

- Um braço rígido **AOB** em foma de L, de massa desprezável e que roda em torno do ponto **O**;
- Um corpo rígido de massa de m e momento de inércia I_B (unidades kg m^2) em relação a um eixo que passa por **B**; este corpo encontra-se ligado ao braço no ponto **B**;
- Um amortecedor de constante de amortecimento c, ligado ao braço no ponto **C**;
- Uma mola de constante de rigidez k, ligada ao braço no ponto **A**.

Em equilíbrio estático o segmento **OB** encontra-se na horizontal. Assuma que os deslocamentos são pequenos.

a) Obtenha a equação do movimento de rotação do braço.

Suponha que a frequência natural não amortecida do instrumento é 2.5 Hz, a razão entre duas amplitudes consecutivas de vibração em regime livre é 111 e a massa é 0.5 Kg. Suponha ainda que a equação do movimento angular é: $25m\ddot{\theta}(t)+9c\dot{\theta}(t)+6.25k\theta(t)=0$

Determine:

b) a constante de rigidez da mola;
c) a razão de amortecimento;
d) a constante de amortecimento;
e) a amplitude do deslocamento de vibração da superfície quando a frequência de vibração é 2 Hz e o ponteiro indica uma amplitude de 0.5 mm (nota: o instrumento não se encontra calibrado).

2. O sistema representado na Figura 2 é constituído por um carro rígido de massa $2m$, ligado ao exterior por uma mola de rigidez k, que translada na direcção horizontal (deslocamento $x_1(t)$) por acção de uma solicitação harmónica $F\cos(\omega t)$. Tendo-se verificado a existência de vibrações indesejáveis acrescentou-se um disco rígido de massa m e raio R (momento de inércia $mR^2/2$ [kg m^2]) ligado ao carro por uma mola de rigidez k. O disco rola sem escorregar sobre o carro e $x_2(t)$ designa o deslocamento absoluto do seu centro de massa na horizontal. Determine

a) as equações do movimento recorrendo às Equações de Lagrange;
b) as frequências naturais e as formas naturais de vibração;
c) as equações de movimento na base modal;
d) o valor da frequência de excitação para a qual a amplitude de vibração do carro é nula.

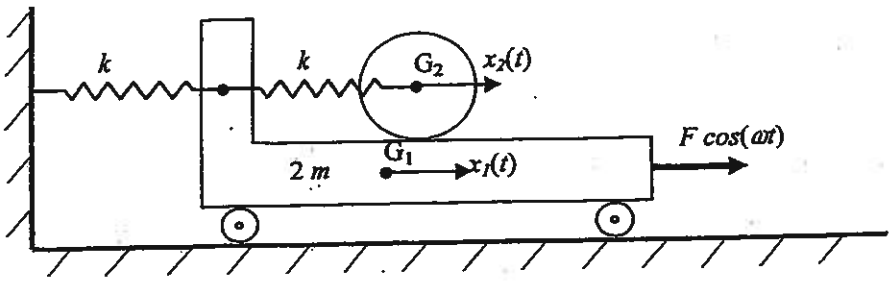


Figura 2

3. A viga representada na Figura 3 tem comprimento L, secção transversal de área A e segundo momento de área I (m^4); o módulo de elasticidade do material é representado por E e a massa volúmica por ρ. A viga está apoiada em dois apoios simples na extremidades e ligada a duas molas, a primeira tem rigidez k e a segunda é uma mola de torção com rigidez k_t. Considere apenas movimentos devidos à flexão da viga, sendo os deslocamentos pequenos.

a) Quais são as condições fronteira do sistema?

b) A função $V(x)=\delta sen(\pi x/L)$ pode ser aplicada para obter uma estimativa para a frequência fundamental de vibração através do método da energia de Rayleigh; ou seja, é uma função admissível?

c) Obtenha uma estimativa para a frequência fundamental de vibração.

d) A função sugerida em b) é aplicável para as seguintes condições limite:

1) $k \to 0$ e $k_t \to 0$?

2) $k \to \infty$ e $k_t \to 0$?

e) Sugira uma função admissível para o caso em que a mola a meio vão é substituída por um apoio simples.

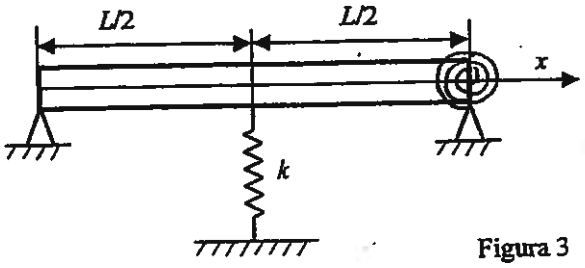
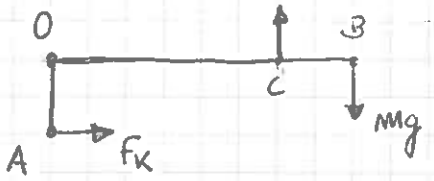


Figura 3

Justifique as respostas.

(1) Diag. equilíbrio F_c estática

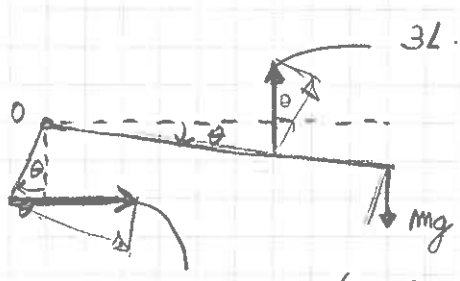
a)



$F_C = C \cdot N = C \cdot \dot{\theta}$

$F_K = K \cdot \Delta x$

$\sin\theta \simeq \theta$
$\cos\theta \simeq 1$



Equação do movimento

$$\Sigma M_O = 0 \Leftrightarrow 2{,}5L F_K = 4L\,mg \Leftrightarrow 2{,}5(2{,}5L\,K\,\theta_{est}) = 4mg$$
$$\Leftrightarrow \theta_{est} = \frac{4mg}{2{,}5^2 L K}$$

$$I_O = \underbrace{I_{barra}}_{=0} + I_{massa}$$
$$= I_B + m d^2 = I_B + m(4L)^2 = I_B + 16mL^2$$

$$4mgL\cos\theta - (2{,}5L)^2 K(\theta + \theta_{est}) - (3L)^2 \cdot C \cdot \dot{\theta} = (I_B + 16mL^2)\cdot\ddot{\theta}$$
$$(I_B + 16mL^2)\cdot\ddot{\theta} + 9L^2 \cdot C \cdot \dot{\theta} + (2{,}5L)^2 K\theta + (2{,}5L)^2 K \cdot \frac{4mg}{2{,}5^2 L K} - 4mgL = 0$$
$$(I_B + 16mL^2)\ddot{\theta} + 9L^2 C\cdot\dot{\theta} + (2{,}5L)^2 \cdot K\theta + 4mgL - 4mgL = 0$$

b) $w_m = 2{,}5\ Hz$ $\quad \frac{x(t_1)}{x(t_1+T)} = 111$ $\quad m = 0{,}5kg$

$$25m\ddot{\theta}(t) + 9C\dot{\theta}(t) + 6{,}25K\theta(t) = 0$$

$w_m = 2\pi \times 2{,}5 = 5\pi$ rad/s

$$w_m = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow 5\pi = \sqrt{\frac{6{,}25K}{25\times 0{,}5}} \Leftrightarrow (5\pi)^2 = \frac{6{,}25K}{25\times 0{,}5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow K = \frac{0{,}5(5\pi)^2 \times 25}{6{,}25} = 493{,}5\ N/m$$

U.PORTO
www.up.pt

c) $\zeta = ?$ $\quad \zeta = \dfrac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$ $\quad \delta = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{111}{}\right) = 2{,}355$

$$\zeta = \frac{2{,}355}{\sqrt{(2\pi)^2 + 2{,}355^2}} = 0{,}351 \rightarrow \text{Sistema sub-amortecido}$$

d)

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_m} \Leftrightarrow 0{,}351 = \frac{9.c}{2 \times 25 \times 0{,}5 \times 5\pi} \Leftrightarrow c = 15{,}32 \text{ Kg/s}$$

e) Os 0,5 mm são o deslocamento da massa em relação à base móvel, logo trata-se de um deslocamento relativo.

$$TR_R = \frac{z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad ; \quad \beta = \frac{\omega}{\omega_M} = \frac{2 \times 2\pi}{2{,}5 \times 2\pi} = 0{,}8$$

$$TR_R = \frac{0{,}8^2}{\sqrt{(1-0{,}8^2)^2 + (2 \times 0{,}351 \times 0{,}8)^2}} = 0{,}959$$

$$\frac{z(\omega)}{Y} = 0{,}959 \Leftrightarrow \frac{0{,}5 \times 10^{-3}}{Y} = 0{,}959 \Leftrightarrow Y = 0{,}521 \text{ mm}$$

(2)

a) $$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = F \cos(\omega t)$$

$$\boxed{J_0 = \frac{I_0}{r^2}}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0$$

- Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \frac{1}{2} J_0 \dot{\theta}$$

$$= \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Como o movimento x_2 é absoluto não é necessário contar com a relação (inércia da roda)

- Energia Potencial

$$V = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2 = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K x_2^2 - K x_2 x_1 + \frac{1}{2} K x_1^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = Kx_1 - Kx_2 + Kx_1 = 2Kx_1 - Kx_2 = K(2x_1 - x_2)$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = Kx_2 - Kx_1 = K(x_2 - x_1)$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2Kx_1 + Kx_2 = F \\ m\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) = 0 \end{cases}$$

Forma matricial

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Problema característico $\Delta(\omega^2) = \left| [K] - \omega^2 [m] \right| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2K - 2m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow (2K - 2m\omega^2)(K - m\omega^2) - (-K)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2K^2 - 2Km\omega^2 - 2m\omega^2 K + 2m^2\omega^4 - K^2 = 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow K^2 - 4Km\omega^2 + 2m^2\omega^4 = 0 \Leftrightarrow \omega_1^2 = 0,29289$$
$$\omega_2^2 = 1,707$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_1^2} = 0,54 \cdot \sqrt{\frac{K}{m}}$$
$$\omega_2 = \sqrt{\omega_2^2} = 1,31 \cdot \sqrt{\frac{K}{m}}$$

- formas naturais

$$\begin{bmatrix} 2K - 2m \times 0,54^2 \cdot \frac{K}{m} & -K \\ -K & K - m\,0,54^2 \frac{K}{m} \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (2K - 0,5832K) \cdot U_{11} - KU_{21} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_{11}}{U_{21}} = \frac{1}{2 - 0,5832} = 0,71$$

$$\{U\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,71 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

U.PORTO
www.up.pt

$$\omega_2 = 1{,}31 \cdot \sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \begin{bmatrix} 2K - 2m \cdot 1{,}31^2 \cdot \frac{K}{m} & -K \\ -K & K - m \cdot 1{,}31^2 \cdot \frac{K}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (2K - 3{,}43K)\,U_{12} - KU_{22} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_{12}}{U_{22}} = \frac{1}{2-3{,}43} = -0{,}7$$

$$\{U\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}7 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) Normalizando para massas modais unitárias

$$\{\phi\}_1 = \frac{\{U\}_1}{\sqrt{\{U\}_1^T [m] \{U\}_1}} = \frac{\begin{Bmatrix} 0{,}71 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\sqrt{2{,}0082}} = \begin{Bmatrix} 0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{\{U\}_2}{\sqrt{\{U\}_2^T [m] \{U\}_2}} = \frac{\begin{Bmatrix} -0{,}7 \\ 1 \end{Bmatrix}}{\sqrt{1{,}98}} = \begin{Bmatrix} -0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$[\phi] = \begin{bmatrix} 0{,}5/\sqrt{m} & -0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} & 0{,}71/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

Transformação de coordenadas:

$$\underbrace{[\phi]^T [m] [\phi]}_{[I]} \{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{[\phi]^T [c] [\phi]}_{[2\xi\Omega]} \{\dot{\eta}(t)\} + \underbrace{[\phi]^T [K] [\phi]}_{[\Omega^2]} \{\eta\} = [\phi]^T \{F\}$$

(Não existe matriz c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 0{,}54 & 0 \\ 0 & 1{,}31 \end{bmatrix} \left(\sqrt{K/m}\right) \right)^2}_{\begin{bmatrix} 0{,}3 & 0 \\ 0 & 1{,}71 \end{bmatrix} \cdot \left(\frac{K}{m}\right)} \cdot \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{0{,}5}{\sqrt{m}} \cdot F \\ -\frac{0{,}5}{\sqrt{m}} \cdot F \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 0{,}3\frac{K}{m} \cdot \eta_1(t) = \frac{0{,}5F}{\sqrt{m}} \\ \ddot{\eta}_2(t) + 1{,}71\frac{K}{m} \cdot \eta_2(t) = -\frac{0{,}5F}{\sqrt{m}} \end{cases}$$

2 equações desacopladas!!

d) $X_1(\omega) = 0 \Rightarrow \omega = ?$

$$X_1(\omega) = \frac{Z_{22} F_1 - Z_{12} F_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} \qquad [Z] = \begin{bmatrix} 2K - 2m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{bmatrix}$$

$$0 = \frac{(K - m\omega^2) F}{(2K - 2m\omega^2) \cdot (K - m\omega^2) - (-K \cdot (-K))} \Leftrightarrow \omega =$$

Exame 23/12/05

Exercício 1

$F_c = c \cdot (\dot{\theta})$

$F_k = K \cdot \Delta x$

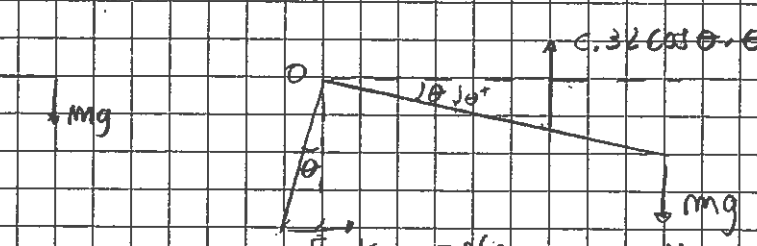
a) equação do movimento do sistema do bloco

Diagrama do equilíbrio dinâmico

Diagrama do eq. estático

$\sin\theta \simeq \theta$

$\cos\theta \simeq 1$



Eq. movimento

$\sum M_O = 0 \Leftrightarrow 2{,}5\,l\,F_K = 4\,l\,mg \Leftrightarrow 2{,}5\,(2{,}5\,l\,\theta_{est}) = 4\,mg \Leftrightarrow \theta_{est} = \frac{4mg}{2{,}5^2 lK}$

$J_O = \underbrace{J_b}_{4=0} + J_m = I_b + md^2 = I_b + m\cdot(4l)^2 = I_b + 16ml^2$

$4mgl\cos\theta - (2{,}5l)K(\theta + \theta_{est}) + 3lc\dot{\theta}\cdot 3l = (I_b + 16ml^2)\ddot{\theta}$

$\Leftrightarrow (I_b + 16ml^2)\ddot{\theta} + 9l^2c\dot{\theta} + (2{,}5l)^2K\theta + (2{,}5l)^2K\frac{4mg}{2{,}5^2 lK} - 4mg\cdot l = 0$

$\Leftrightarrow (I_b + 16ml^2)\ddot{\theta} + 9l^2c\dot{\theta} + (2{,}5l)^2K\theta + \cancel{4mgl} - \cancel{4mgl} = 0$

b) $\omega_m = 2{,}5\ Hz$ $\quad \frac{x(t_1)}{x(t_1+T)} = 111$ $\quad m = 0{,}5\ kg$

$25m\ddot{\theta}(t) + 9c\dot{\theta}(t) + 6{,}25K\theta(t) = 0$

$c = ?$ $\quad \omega = 2\pi f_m \Rightarrow \omega_m = 2\pi \times 2{,}5 = 5\pi\ rad/s$

$\omega_m = \sqrt{\frac{Keq}{meq}} \Leftrightarrow 5\pi = \sqrt{\frac{6{,}25\cdot K}{25\times 0{,}5}} \Leftrightarrow K = 493{,}5\ N/m$

c) O factor de amortecimento ξ

$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}}$ $\quad \delta = \frac{1}{2}\cdot \ln(111) = 2{,}355$

$\xi = 0{,}351 \Rightarrow$ Sistema sub-amortecido

d) a constante de amortecimento c

$\xi = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}\cdot\omega_m} = 0{,}351 = \frac{9\cdot c}{2\times 25\times 0{,}5\times 5\pi} \Leftrightarrow c = 15{,}32\ Kg/s$

e) $\omega = 2\ Hz$ $\quad \cancel{X(\omega)} = 0{,}5\ mm = \cancel{X(t)}$

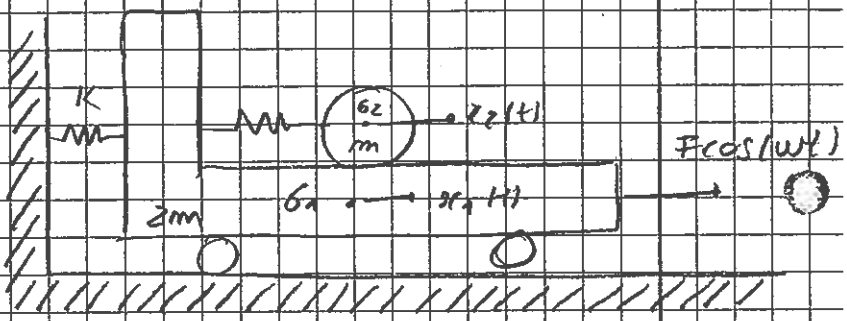
os 0,5 mm são o deslocamento da massa em relação à base móvel, logo temos um movimento relativo.

$$TR_{rel} = \frac{Z(\omega)}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \Rightarrow \frac{0{,}5\times10^{-3}}{Y} = \frac{0{,}8^2}{\sqrt{(1-0{,}8^2)^2 + (2\times0{,}351\times0{,}8)^2}}$$

$$\Rightarrow Y = 0{,}521\ mm$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2\times\cancel{2\pi}}{2{,}5\times\cancel{2\pi}} = 0{,}8$$

Exercício 2



a) eq. movimento por Lagrange

Eq. Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \cancel{\frac{\partial T}{\partial x_1}}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = F\cos(\omega t) \qquad J_0 = \frac{I_0}{r^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \cancel{\frac{\partial T}{\partial x_2}}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = 0 \qquad I_r = \frac{mR^2}{2}$$

• Energia Cinética

$$T = \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 + \cancel{\frac{1}{2} J_0 \cdot \dot{\theta}} \qquad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_2}{R}$$

$$= \frac{1}{2} 2m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \cancel{\frac{1}{2}\frac{I_0}{r^2}} \cdot \dot{\theta}$$

$$= m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2$$

Como o movimento x_2 é absoluto não temos de entrar com a rotação (inércia da roda)

• Energia Potencial

$$V = \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{1}{2} K (x_2 - x_1)^2$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_1} = Kx_1 - K(x_2 - x_1) = 2Kx_1 - Kx_2$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_2} = K(x_2 - x_1) = Kx_2 - Kx_1$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2Kx_1 - Kx_2 = F \\ m\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) frequências e formas modais

- Problema característico $\Delta(\omega) = |[K] - \omega^2[m]| = 0$

$$\left| \begin{bmatrix} 2K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 2K - 2m\omega^2 & -K \\ -K & K - m\omega^2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\Leftrightarrow (2K - 2m\omega^2)\cdot(K - m\omega^2) - (-K)^2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \omega_1 = 0{,}54\sqrt{\frac{K}{m}} \\ \omega_2 = 1{,}31\sqrt{\frac{K}{m}} \end{cases}$$

. Formas modais

$$[A]\cdot\{U\}_1 = \{0\} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2K - 2m\cdot 0{,}54^2\cdot\frac{K}{m} & -K \\ -K & K - m\cdot 0{,}54^2\cdot\frac{K}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2K - 0{,}583K)\cdot U_{11} - K U_{21} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{U_{11}}{U_{21}} = 0{,}71 \qquad \{U\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}71 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

$$\omega_2 = 1{,}31\sqrt{\frac{K}{m}} \qquad \begin{bmatrix} 2K - 2m\cdot 1{,}31^2\frac{K}{m} & -K \\ -K & K - m\cdot 1{,}31^2\frac{K}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$(2K - 3{,}43K)\cdot U_{12} + K U_{22} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_{12}}{U_{22}} = -0{,}7 \qquad \{U\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}7 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

c) as equações de movimento na base modal

normalizando para massas modais unitárias

$$\{\Phi\}_1 = \frac{\{U\}_1}{\sqrt{\{U\}_1^T[m]\{U\}_1}} = \begin{Bmatrix} 0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$[\Phi] = \begin{bmatrix} 0{,}5/\sqrt{m} & -0{,}5/\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} & 0{,}71/\sqrt{m} \end{bmatrix}$$

$$\{\Phi\}_2 = \frac{\{U\}_2}{\sqrt{\{U\}_2^T[m]\{U\}_2}} = \begin{Bmatrix} -0{,}5\sqrt{m} \\ 0{,}71/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

Transformação de coordenadas: $\{x(t)\} = [T]\{M(t)\}$

$$[\Phi]^T[m][\Phi]\{\ddot{M}(t)\} + [\Phi]^T[K][\Phi]\{M(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\}$$

e atendendo à propriedade de ortonormalidade dos vetores modais:

$$[I]\cdot\{\ddot{M}(t)\} + [\Omega^2]\{M(t)\} = [\Phi]^T\cdot\{f(t)\}$$

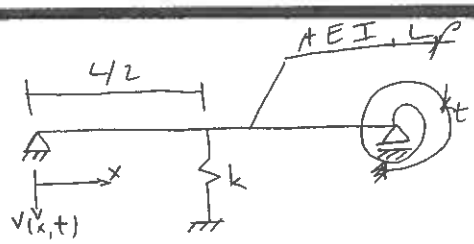
$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}\ddot{m}_1(t)\\ \ddot{m}_2(t)\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0{,}3\frac{K}{m} & 0\\ 0 & 1{,}7\frac{K}{m}\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}m_1(t)\\ m_2(t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\frac{0{,}5}{\sqrt{m}}\cdot F\\ \frac{-0{,}5}{\sqrt{m}}\cdot F\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases}\ddot{m}_1(t) + 0{,}3\frac{K}{m}m_1(t) = \frac{0{,}5F}{\sqrt{m}}\\ \ddot{m}_2(t) + 1{,}7\frac{K}{m}m_2(t) = -\frac{0{,}5F}{\sqrt{m}}\end{cases}$$ 2 equações desacopladas!!!

d) $w = ?$ $\quad X_1(w) = 0$

$$X_1(w) = \frac{z_{22}F_1 + z_{12}F_2}{z_{11}z_{22} - z_{12}z_{21}} \qquad [Z] = \begin{bmatrix}2K - 2mw^2 & -K\\ -K & K - mw^2\end{bmatrix}$$

$$0 = \frac{(K - mw^2)F}{(2K - 2mw^2)\cdot(K - mw^2) - K^2} \Rightarrow w = \sqrt{\frac{K}{m}}\ ?$$

3. 

Flexão.

a) Condições de fronteira

Para $x=0$ e $v(0,t)=0$ e $EI\frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2}=0$ n

Para $x=l$ e $v(l,t)=0$ e $EI\frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2}=k_t\frac{\partial v(l,t)}{\partial x}$ n

Para $x=\frac{l}{2}$ e $EI\frac{\partial^3 v(l/2,t)}{\partial x^3}=k\,v(\frac{l}{2},t)$ n

b) $V(x)=\delta \operatorname{sen}(\pi x/l) \Rightarrow V'(x)=\delta\frac{\pi}{l}\cos(\frac{\pi}{l}x) \Rightarrow V''(x)=-\delta(\frac{\pi}{l})^2\operatorname{sen}(\frac{\pi}{l}x)$

- Verificar condições de fronteira geométricas

$V(l)=0 \iff \delta\operatorname{sen}(\frac{\pi l}{l})=0 \iff 0=0$ ✓

$V(0)=0 \iff \delta\operatorname{sen}0=0 \iff 0=0$ ✓

Como é 1 prob. de flexão, 4ta ordem, V(x) tem q ser derivavel 2 vezes, as f trig são derivaveis infinitas vezes ✓.

V(x) é aplicável

c) Pelo método de Rayleigh:

$$T_{max}=\frac{1}{2}\omega^2\int_0^l \rho A(\delta\operatorname{sen}(\tfrac{\pi x}{l}))^2dx=\frac{1}{2}\omega^2\rho A\delta^2\int_0^l \operatorname{sen}^2\tfrac{\pi}{l}x\,dx=\frac{1}{4}\omega^2\rho lA\delta^2$$

$$V_{max}=\frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2dx+\frac{1}{2}k\left(V(\tfrac{l}{2})\right)^2+\frac{1}{2}k_t\left(\frac{dV(l)}{dx}\right)^2$$

$$=\frac{1}{2}EI\delta^2\left(\frac{\pi}{l}\right)^4\int_0^l \operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi}{l}x\right)dx+\frac{1}{2}k\delta^2+\frac{1}{2}k_t\left(\frac{\pi}{l}\cdot\delta\right)^2$$

$$\frac{1}{4}EI\delta^2\frac{\pi^4}{l^4}+\frac{1}{2}k\delta^2+\frac{1}{2}k_t\delta^2\frac{\pi^2}{l^2}=\frac{1}{2}\omega^2\rho A\frac{l}{2}\delta^2$$

$$\sqrt{\left(EI\frac{\pi^4}{l^4}+2\frac{k}{l}+2k_t\frac{\pi^2}{l^3}\right)\cdot\frac{1}{\rho A}}=\omega$$

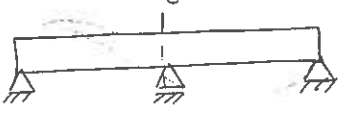
e)
$V(x)=\delta\operatorname{sen}(\frac{2\pi}{l}x)$
$x=0$
$\operatorname{sen}0=0$
$x=l$ $\operatorname{sen}(2\pi)=0$ ✓
$x=\frac{l}{2}$ $\operatorname{sen}(\pi)=0$

d) $k\to 0$; $k_t\to 0$



A cond de fronteira são iguais as anteriores sim verifica.

$k\to\infty$ $k_t\to 0$



Uma nova c.f.g. $V(\frac{l}{2},t)=0$

Não verificaria a c/g nova, logo não é admissível

2. c) $|\phi| = \frac{1}{\sqrt{|u|^T [m] |u|}} |u|$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2,5m \end{bmatrix} \begin{vmatrix} 0,6 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1,2\,m \\ 2,5\,m \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0,6 & 1 \end{vmatrix} = 1,2 \cdot 0,6m + 2,5m \cdot 1 = 3,22\,m$$

$$|\phi|_1 = \frac{1}{\sqrt{3,22m}} |u| = \sqrt{\frac{1}{m}} \begin{vmatrix} 0,336 \\ 0,560 \end{vmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & 2,5m \end{bmatrix} \begin{vmatrix} -2,1 \\ 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -4,2\,m \\ 2,5\,m \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2,1 & 1 \end{vmatrix} = 8,82m + 2,5 = 11,32m$$

$$|\phi|_2 = \frac{0,297}{\sqrt{m}} \begin{vmatrix} -2,1 \\ 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{m}} \begin{vmatrix} -0,624 \\ 0,297 \end{vmatrix}$$

d) $X_1(\omega) = 0 \longrightarrow \omega = ?$

$$Z = [[k] - \omega^2 [m]]$$

$$\begin{bmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - \frac{5}{2} m\omega^2 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} X_1 \\ X_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$X_1 = \frac{Z_{22} F_1 - Z_{12} F_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} = \frac{(k - 2,5\,m\omega^2) F}{(2k - 2m\omega^2)(k - 2,5m\omega^2) - k^2} = 0 \qquad \text{como } F \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{F(k - 2,5m\omega^2)}{(\omega^2 - 1,24\frac{k}{m})(\omega^2 - 0,16\frac{k}{m})} = 0$$

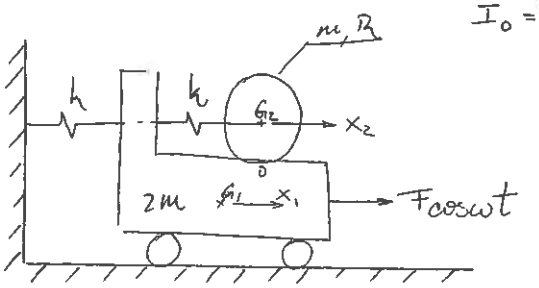
$\omega^2 \neq 1,24 \frac{k}{m}$

$\omega^2 \neq 0,16 \frac{k}{m}$

$\omega^2 = \frac{k}{2,5m} = 0,4 \frac{k}{m}$

$\omega = \pm 0,63 \sqrt{\frac{k}{m}}$

2.



$I_O = m\frac{R^2}{2}$

a) $T = \frac{1}{2}(2m)\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}_2^2 + \frac{1}{2}(I_O + mR^2)\dot{\theta}^2$

$v_{x_2} = \omega \overrightarrow{OG_2} = R\omega = R\dot{\theta} = \dot{x}_2 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{\dot{x}_2}{R}$

$T = m\dot{x}_1^2 + \frac{1}{2}\underbrace{\left(2m + \frac{I_O}{R^2}\right)}_{5m/2}\dot{x}_2^2$

$V = \frac{1}{2}kx_1^2 + \frac{1}{2}k(x_2 - x_1)^2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{x_1}}\right) = 2m\ddot{x}_1 \qquad \frac{\partial V}{\partial q_{x_1}} = kx_1 - k(x_2 - x_1) = 2kx_1 - kx_2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_{x_2}}\right) = \left(2m + \frac{I_O}{R^2}\right)\ddot{x}_2 = \left(2m + m\frac{R^2}{2}\cdot\frac{1}{R^2}\right)\ddot{x}_2 = \frac{5}{2}m\ddot{x}_2$

$\frac{\partial V}{\partial q_{x_2}} = k(x_2 - x_1)$

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 2kx_1 - kx_2 \\ \frac{5}{2}m\ddot{x}_2 - kx_1 + kx_2 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & \frac{5}{2}m \end{bmatrix}\begin{vmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{vmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F \\ 0 \end{vmatrix}\cos\omega t$$

b) $$\begin{vmatrix} 2k - 2m\omega^2 & -k \\ -k & k - \frac{5}{2}m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2k^2 - 5km\omega^2 - 2km\omega^2 + 5m^2\omega^4 - k^2 = 0$$

$$5m^2\omega^4 - 7mk\omega^2 + k^2 = 0$$

$$\frac{7mk \pm \sqrt{49m^2k^2 - 20m^2k^2}}{2\cdot 5m^2} = \frac{0{,}7mk \pm 0{,}1mk\sqrt{29}}{m^2} = 0{,}7\frac{k}{m} \pm 0{,}1\sqrt{29}\frac{k}{m}$$

$$\begin{cases} \omega_2^2 = 1{,}24\frac{k}{m} \\ \omega_1^2 = 0{,}16\frac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_2 = 1{,}113\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_1 = 0{,}402\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

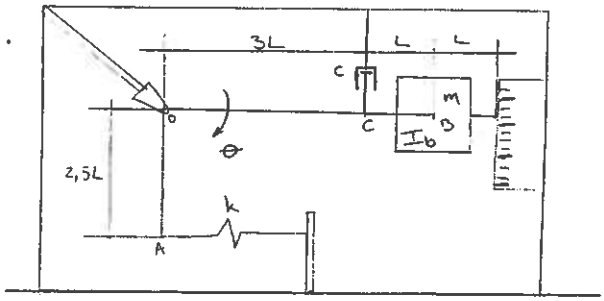
$$\begin{bmatrix} 2k - 2m\cdot 1{,}24\frac{k}{m} & -k \\ -k & k - \frac{5}{2}m\cdot 1{,}24\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{vmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -0{,}48ku_{12} - ku_{22} = 0 \\ -ku_{12} - 2{,}1ku_{22} = 0 \end{cases} \quad \frac{u_{12}}{u_{22}} = -2{,}1 \quad \{u\}_2 = \begin{vmatrix} -2{,}1 \\ 1 \end{vmatrix}$$

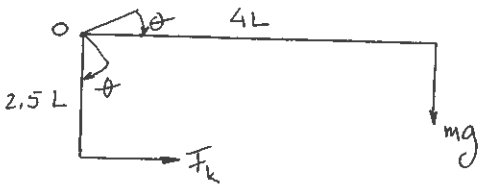
$$\begin{bmatrix} 2k - 2m\cdot 0{,}16\frac{k}{m} & -k \\ -k & k - \frac{5}{2}m\cdot 0{,}16\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{vmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} 1{,}68ku_{11} - ku_{21} = 0 \\ -ku_{11} + 0{,}6ku_{21} = 0 \end{cases} \quad \frac{u_{11}}{u_{21}} = 0{,}6 \quad \{u\}_1 = \begin{vmatrix} 0{,}6 \\ 1 \end{vmatrix}$$

$$\{x\}_1 = \begin{vmatrix} 0{,}6 \\ 1 \end{vmatrix}\cos\left(0{,}402\sqrt{\frac{k}{m}} - \phi_1\right) \quad ; \quad \{x\}_2 = \begin{vmatrix} -2{,}1 \\ 1 \end{vmatrix}\cos\left(1{,}113\sqrt{\frac{k}{m}} - \phi_2\right)$$

Exame 23/12/2005

1).





a)

$\Sigma M_o = J_o \ddot{\theta} = (J^o_{barra} + J^o_{massa})\ddot{\theta} = (I_B + 16L^2 m)\ddot{\theta}$

$J^o_{massa} = J^G_{massa} + m(OB)^2 = (I_B + 16L^2 m)\ddot{\theta}$

$mg \cdot 4L\cos\theta - F_c\, 3L\cos\theta - F_k\, 2{,}5L\cos\theta = (I_B + 16L^2 m)\ddot{\theta}$

$F_c = c \cdot 3L\dot{\theta}\cos\theta = 3Lc\dot{\theta}$

$F_k = k \cdot 2{,}5L(\sin\theta + \theta_{est}) = 2{,}5Lk(\theta + \theta_{est})$

$mg4L - (3L)^2 c\dot{\theta} - (2{,}5L)^2 k\theta - (2{,}5L)\frac{4mg}{2{,}5L} = (I_B + 16L^2 m)\ddot{\theta}$

$(I_B + 16L^2 m)\ddot{\theta} + (3L)^2 c\dot{\theta} + (2{,}5L)^2 k\theta = 0$

$\Sigma M = 0 \Leftrightarrow 2{,}5F_k = 4mg$

$2{,}5k \cdot (2{,}5L)\theta_{est} = 4mg$

$\theta_{est} = \frac{4mg}{2{,}5^2 Lk}$

b) $f_n = 2{,}5$ Hz ; $\frac{x(t_1)}{x(t_1+T)} = ???$; $m = 0{,}5$ kg ; $25m\ddot{\theta} + 9c\dot{\theta} + 6{,}25k\theta = 0$

b)

$\omega_n = 2\pi f_n = 2\pi \cdot \frac{5}{2} = 5\pi$ rad/s

$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow k = m\omega_n^2 = 0{,}5 \cdot (5\pi)^2 = 123{,}37$ N/m

c)

$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln 111 = 4{,}71$, $\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = 0{,}6$

d)

$\xi = \frac{c}{2m\omega_n} \Leftrightarrow c = 0{,}6 \cdot 2 \cdot 0{,}5 \cdot 5\pi = 3\pi = 9{,}425$ kg/s

e) $f = 2$ Hz $\quad Z(\omega) = 0{,}5$ mm $\rightarrow Y = ?$

$\frac{Z}{Y} = \frac{\beta^2}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$ $\qquad \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2}{2{,}5} = 0{,}8$

$\frac{Z}{Y} = \frac{0{,}8^2}{\sqrt{(1-0{,}8^2)^2 + (2 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}8)^2}} = 0{,}6242$

$Y = \frac{0{,}5}{0{,}6242} = 0{,}8$ mm