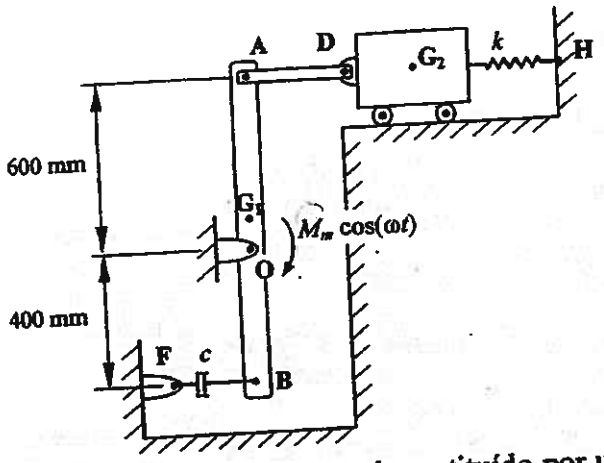
Exame de Vibrações de Sistemas Mecânicos Época Normal FEUP – DEMEGI 13 de Janeiro de 2006

Parte prática 2horas e 15 minutos PERMITIDA A CONSULTA DE UM TEXTO DE APOIO



$\overline{AB} = \ell = 1$ m

$\overline{AG_1} = \frac{\ell}{2}$

O sistema representado na figura acima é constituído por uma barra rígida[1], de massa m_b=2 kg. A barra está articulada no ponto **O** e sujeita à acção de um momento motor $M_m \cos(\omega t)$. Está também ligada ao exterior no ponto **A** através de uma pequena barra (**AD**), de uma massa rígida de 2 kg e de uma mola com rigidez k=50 N/m. A barra **AD** é rígida e de massa desprezável. Os pontos **B** e **F** encontram-se ligados por um amortecedor viscoso. Admita que os deslocamentos são pequenos e que em repouso a barra se encontra na vertical.

a) Obtenha a equação do movimento.

Suponha que a equação do movimento é: $0.9\ddot{\theta}(t) + 0.09c\dot{\theta}(t) + 15.06\theta(t) = M_m \cos(\omega t)$

e determine:

b) a frequência natural, ω_n;

c) sabendo que o tempo que decorre entre dois picos sucessivos de vibração em regime livre é 2 segundos, calcule a constante de amortecimento c;

d) para uma frequência de excitação de 6 rad/s, calcule a amplitude (M_m) máxima do momento motor de modo a que a amplitude de vibração no ponto **A** não ultrapasse os 6 milímetros;

e) na situação da alínea anterior, obtenha as amplitudes das forças nos pontos **A** e **B**.

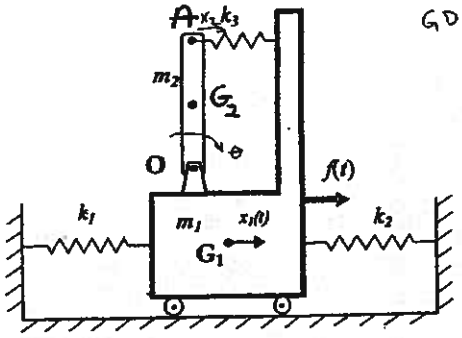
2 – O sistema representado na figura seguinte é constituído por duas molas, de rigidez k_1=1000 N/m e k_2= 2000 N/m, e por um carrinho rígido de massa m_1= 2.67 kg que translada horizontalmente (x_1(t)) sob a acção de uma força harmónica $f(t)$=F cos(ωt), com F=3 N. Verificou-se que a máxima amplitude de vibração ocorre à frequência de 30 rad/s, que é também a frequência de funcionamento do sistema. Para resolver este problema, acrescentou-se uma barra rígida[1] ao corpo 1, articulada no ponto **O** (rotação θ(t)), de massa m_2=1 kg e comprimento L=0.1 m, e uma mola de rigidez k_3= 500 N/m.

---

[1] Nota: o momento de inércia de uma barra em relação a um eixo que passa pelo seu centro de gravidade é $I_G = \frac{1}{12} m\ell^2$

Exame de Vibrações de Sistemas Mecânicos Época Normal FEUP – DEMEGI 13 de Janeiro de 2006

Parte prática 2horas e 15 minutos PERMITIDA A CONSULTA DE UM TEXTO DE APOIO



GDL = x_1, θ ou x_1, x_2 ?

a) Determine as equações do movimento recorrendo ao formalismo de Lagrange.

b) Determine as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) Escreva as equações do movimento na base modal.

d) Qual deve ser o novo valor de k_3 de forma que a amplitude de vibração do carrinho seja nula.

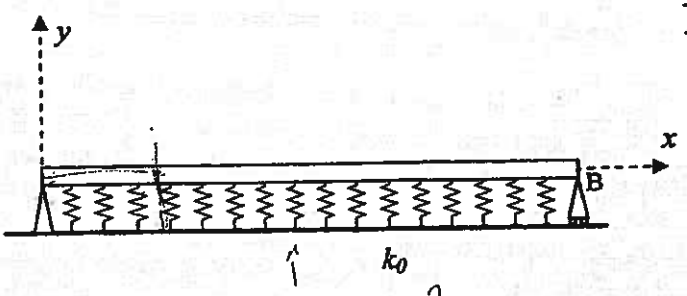
3 – Uma viga (flexível) de comprimento ℓ, de secção transversal com área A e segundo momento área I (m^4), módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, encontra-se apoiada nas duas extremidades e assente sobre uma fundação elástica de rigidez por unidade de comprimento k_0. Pretende-se analisar a vibração à flexão desta viga.

a) Escreva as condições de fronteira do sistema.

b) Verifique se a função $V(x) = \delta\, sen\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$ é uma função admissível.

c) Determine uma estimativa para a frequência fundamental de vibração do sistema.

d) Calcule o erro da estimativa anterior quando $k_0 \to 0$. Comente o resultado.



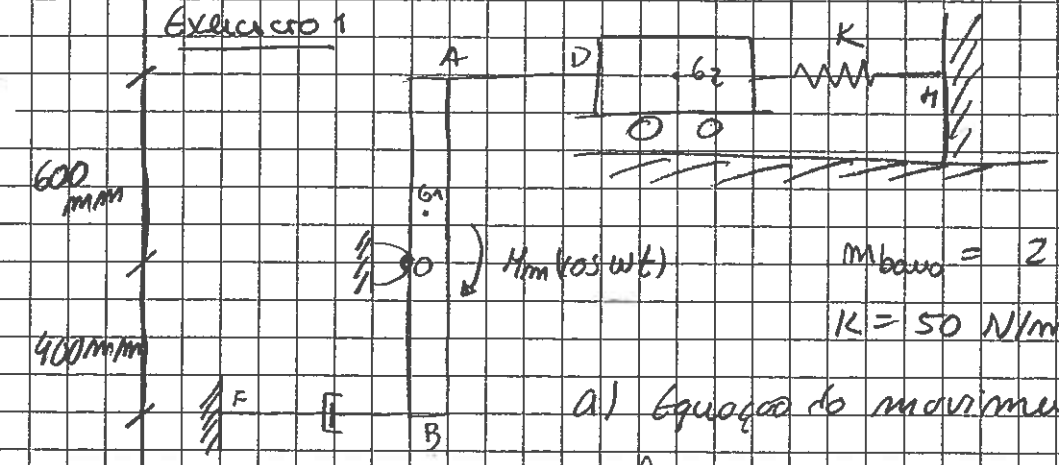
$\overline{AB} = \ell$

?

Fh equiv?

Exame 13 Janeiro 2006

Exercício 1



$\overline{AB} = l = 1\ m$

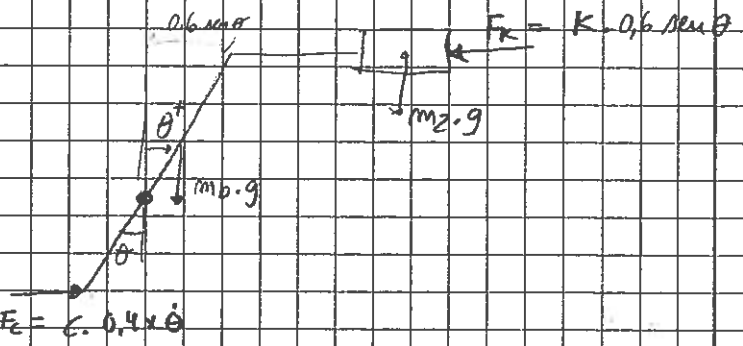
$\overline{AG_1} = \frac{l}{2} = 0{,}5\ m$

$m_{barra} = 2\ kg \quad m_2 = 2\ kg$

$K = 50\ N/m$

a) Equação do movimento

Projetando corpo livre Dinâmico



$J_b = J_G + m d^2$

$= \frac{1}{12} \times 2 \times 1^2 + 2 \times 0{,}2^2$

$= 0{,}25\ kg\,m^2$

$J_2 = m_2 . OA^2 = 0{,}6^2 . m_2$

$-0{,}4\,c\,\dot{\theta} . 0{,}4 . \cos\theta + m_b . g . 0{,}2 . \operatorname{sen}\theta - 0{,}6\,K \operatorname{sen}\theta . 0{,}6 \cos\theta = (J_b + J_2)\ddot{\theta}$

linearizando pela série de Taylor $\Rightarrow \operatorname{sen}\theta \cong \theta \quad \cos\theta = 1$

$-0{,}16\,c\,\dot{\theta} + 3{,}92\,\theta - 0{,}36\,K\,\theta = (0{,}25 + 0{,}72)\ddot{\theta} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0{,}97\,\ddot{\theta} + 0{,}16\,c\,\dot{\theta} + 14{,}08\,\theta = M_m \cos(\omega t)$

b) $0{,}9\,\ddot{\theta}(t) + 0{,}09\,c\,\dot{\theta}(t) + 15{,}06\,\theta(t) = M_m \cos(\omega t)$

ω_n? $\quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\frac{15{,}06}{0{,}9}} = 4{,}1\ rad/s$

c) $T_d = 2\,s \Rightarrow T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \Leftrightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{2} = 3{,}14\ rad/s$

$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \Rightarrow \xi = 0{,}64$

$\xi = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \Leftrightarrow 0{,}64 = \frac{0{,}09 . c}{2 \times 0{,}9 \times 4{,}1} \Leftrightarrow c = 52{,}48\ Ns/m$

d) $\omega = 6\ rad/s \quad M_m = ? \quad A(\omega) < 6\ mm \Rightarrow 0{,}006 = 0{,}6 . \theta$

$\Leftrightarrow \theta = 0{,}01\ rad$

$X(\omega) = \frac{Xs}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \Leftrightarrow 0{,}01 = \frac{M_m / 15{,}06}{\sqrt{(1-1{,}5^2)^2 + (2 \times 0{,}64 \times 1{,}5)^2}}$

$\beta = \frac{6}{4{,}1} = 1{,}5$

$\Leftrightarrow M_m = 0{,}35\ Nm$

c) amplitude do força nos pontos A e B

$\theta(t) = \Theta(\omega)\cos(\omega t - \phi)$

$\dot{\theta}(t) = -\omega\,\Theta(\omega)\cos(\omega t - \phi)$ $\qquad \phi = \tan^{-1}\frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} = -99°4$

$F_6 = -6.0,4 \times \omega\,\Theta(\omega)\cos(\omega t - \phi)$

$= -52,48 \times 0,4 \times 6 \times 0,01 \cdot \cos(6t - \phi)$

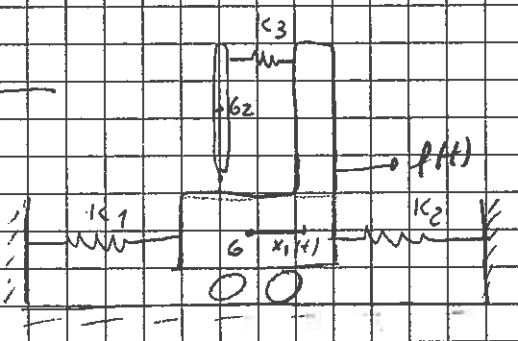
$= -1,26\cos(6t + 1)$

$F_k = 0,6 \times K \times \Theta(6)$

$= 0,6 \times 50 \times \Theta(\omega) \cdot \cos(\omega t - \phi)$

$= 0,3\cos(6t + 1)$.

Exercício 2



$K_1 = 1000$ N/m $\qquad K_2 = 2000$ N/m

$m_1 = 2,67$ kg $\qquad f(t) = F\cos(\omega t)$

$F = 3$ N $\qquad f(t) = 3\cos(\omega t)$

$\omega = 30$ rad/s $\Longrightarrow$ amplitude máxima (à freq. de funcionamento)

$m_2 = 1$ kg $\qquad \Delta = 0,1$ m $\qquad K_3 = 500$ N/m

a) equações do movimento recorrendo a Lagrange.

2 graus de liberdade $\Rightarrow x(t)$ e $\theta(t)$

Energia cinética: $T = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_b\cdot\dot{\theta}^2 = 1,84\,\dot{x}^2 + 0,0017\,\dot{\theta}^2$

$J_b = J_G + md^2 = \frac{1}{12}\cdot 1 \cdot 0,1^2 + 1 \times 0,05^2 = 0,0033$ kg m^2

$V = \frac{1}{2}(K_1 + K_2)\cdot x^2 + \frac{1}{2}K_3\cdot(x - \ell\,\theta)^2$ — ACOPLAMENTO!!!

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial x} = f(t)$ $\qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 3,68\,\dot{x}$ $\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 3,68\,\ddot{x}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x} = (K_1 + K_2)x + K_3(x - \ell\theta)\cdot 1$

$= 3000\,x + 500x - 50\,\theta = 3500x - 50\theta$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 0,0034\,\dot{\theta}$ $\qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = 0,0034\,\ddot{\theta}$

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = -\ell K_3(x - \ell\theta) = -50x + 5\theta$

13/01/06

b) Frequências e as formas naturais de vibração.

Problema característico $\Delta(\omega) = |[K] - \omega^2[m]| = 0$

Continuação alínea a)

$$\begin{cases} 3{,}68\,\ddot{x} + 3500\,x - 50\,\theta = f(t) \\ 0{,}0034\,\ddot{\theta} + 5\theta - 50\,x = 0 \end{cases}$$

na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 3{,}68 & 0 \\ 0 & 0{,}0034 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3500 & -50 \\ -50 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Delta(\omega) = \left| \begin{bmatrix} 3500 & -50 \\ -50 & 5 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 3{,}68 & 0 \\ 0 & 0{,}0034 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\left| \begin{bmatrix} 3500 - 3{,}68\,\omega^2 & -50 \\ -50 & 5 - 0{,}0034\,\omega^2 \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$(3500 - 3{,}68\,\omega^2) \cdot (5 - 0{,}0034\,\omega^2) - (-50)^2 = 0$$

$\Rightarrow \omega_1 = 26{,}341$ rad/s

$\omega_2 = 41{,}58$ rad/s

Formas naturais

ω_1 $$\begin{bmatrix} 3500 - 3{,}68 \times 26{,}34^2 & -50 \\ -50 & 5 - 0{,}0034 \times 26{,}34^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$946{,}83\,U_{11} - 50\,U_{21} = 0 \Rightarrow \dfrac{U_{11}}{U_{21}} = 0{,}053$ $\quad \{U\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}053 \\ 1 \end{Bmatrix}$

ω_2 $$\begin{bmatrix} 3500 - 3{,}68 \times 41{,}58^2 & -50 \\ -50 & 5 - 0{,}0034 \times 41{,}58^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$-2862{,}34\,U_{12} - 50\,U_{22} = 0 \Rightarrow \dfrac{U_{12}}{U_{22}} = -0{,}017$

$\{U\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}017 \\ 1 \end{Bmatrix}$

c) Eq. movimento na base modal

transformação do conjunto das $\{x(t)\} = [T]\{M(t)\}$

normalização dos vetores modais:

$$\{\phi\}_1 = \frac{\{u\}_1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} = \begin{Bmatrix} 0,452 \\ 8,531 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{\{u\}_2}{\sqrt{\{u\}_2 [m] \{u\}_2}} = \begin{Bmatrix} -0,254 \\ 14,97 \end{Bmatrix}$$

$$\phi = \begin{bmatrix} 0,452 & -0,254 \\ 8,531 & 14,97 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{[\phi]^T [m] [\phi]}_{[I]} \{\ddot{M}(t)\} + \underbrace{[\phi]^T [k] [\phi]}_{[\Omega^2]} \cdot \{M(t)\} = \underbrace{[\phi]^T \{f(t)\}}_{N(t)}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \ddot{M}_1(t) \\ \ddot{M}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 26,34^2 & 0 \\ 0 & 41,58^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} M_1(t) \\ M_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,452 \cdot f(t) \\ 8,531 \cdot f(t) \\ -0,254 \cdot \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{M}_1(t) + 693,8\, M_1(t) = 0,452\, f(t) \\ \ddot{M}_2(t) + 1728,9\, M_2(t) = 8,531\, f(t) \end{cases}$$

d) $K_3 = ?$ de forma a que a amplitude do caminho seja nula

$$X_1(\omega) = \frac{Z_{22} F_1 - Z_{12} F_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} = 0$$

$$[K] = \begin{bmatrix} 3000 + K_3 & -50 \\ -0,1 K_3 & 0,01 K_3 \end{bmatrix}$$

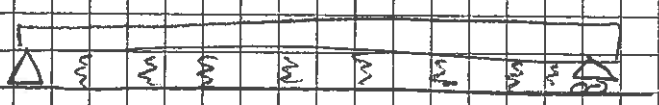
$$[Z] = \begin{bmatrix} (3000 + K_3) - 30^2 \times 3,68 & -50 \\ -0,1 K_3 & 0,01 K_3 - 30^2 \times 0,0034 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} K_3 - 312 & -56 \\ -0,1 K_3 & 0,01 K_3 - 3,06 \end{bmatrix}$$

$$0 = \frac{(0,01 K_3 - 3,06) \cdot 3}{(K_3 - 312)(0,01 K_3 - 3,06) - (-50)(-0,1 K_3)} \Leftarrow K_3 = 306\ N/m_4$$

Exercício 3

Vibração à flexão



a) Condições de fronteira do sistema

$x = 0$ | · Deslocamento nulo $\quad V(x=0) = 0$

· Momento fletor nulo $\quad EI \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=0} = 0$

$x = l$ | · Deslocamento nulo $\quad V(x=l) = 0$

· Momento fletor nulo $\quad EI \left.\frac{d^2V}{dx^2}\right|_{x=l} = 0$

b) $V(x) = S \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right)$

· O função tem de ser derivável mesmo da ordem do sistema (4)

Como é uma função trigonométrica é derivável n vezes

· tem de satisfazer as condições de fronteira

$V(x=0) = S \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot 0}{l}\right) = 0$ ✓

$V(x=l) = S \operatorname{sen}\left(\frac{\pi \cdot l}{l}\right) = 0$ ✓

c) def. freq. fundamental de vibração

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\left(\frac{d^2V}{dx^2}\right)dx + \frac{1}{2} K_{eq} (V(l/2))^2$$

$$V'(x) = \frac{\pi S}{l}\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right) \qquad V''(x) = -\frac{\pi^2 \cdot S}{l^2}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right)$$

$$V(l/2) = S \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = S$$

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI\frac{\pi^2}{l^2}\cdot S \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{l}\right) + \frac{1}{2} K_{eq} S^2$$

$$= -\frac{EI\,\pi^2 S}{2l^2}\cdot 0{,}03\,l + \frac{1}{2} K_{eq} \cdot S^2 = -0{,}15\,\frac{EI\,S}{l} + 0{,}5\,K_{eq} S^2$$

$$T_{máx} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho A \cdot \left(v \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)\right)^2 dx \right)$$

$$= \frac{1}{2} \omega^2 \rho A v^2 \cdot \int_0^{\ell} \left(\operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}\right)^2 dx$$

$$= 0{,}0005 \; \rho A \ell \omega^2 v^2$$

$$V_{máx} = T_{máx}$$

$$\Rightarrow -0{,}15 \frac{EIv}{\ell} + 0{,}5 K_{eq} v^2 = 0{,}0005 \; \rho A \ell v^2 \omega^2$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{-0{,}15 \frac{EIv}{\ell} + 0{,}5 K_{eq} \cdot v^2}{0{,}0005 \; \rho A \ell v^2}$$

$$= \frac{-0{,}15 \; EI \cancel{v} + 0{,}5 \; \ell K_{eq} \cdot v^{\cancel{2}}}{0{,}0005 \; \rho A \ell^2 v^{\cancel{2}}}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{0{,}5 \ell v K_{eq} - 0{,}15 EI}{0{,}0005 \; \rho A \ell^2 v}}$$

d) $K_0 \to 0 \Rightarrow V_{máx} = -0{,}15 \frac{EIv}{\ell}$ calcular ...