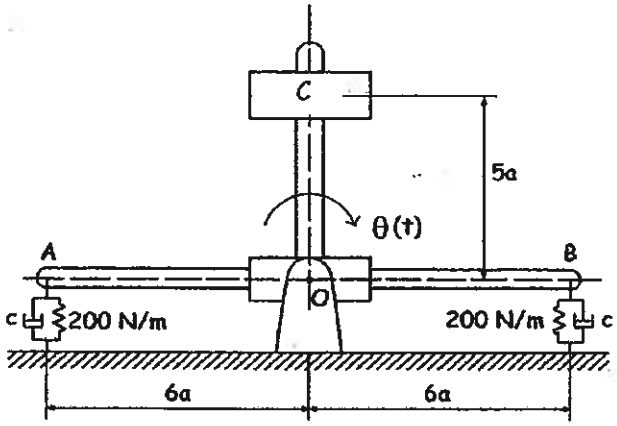


1) O pêndulo representado na figura oscila em torno do ponto O, sendo o seu movimento controlado por dois conjuntos mola-amortecedor. Num ensaio em regime livre, foram lidos os seguintes valores sequenciais para o deslocamento angular máximo (relativo) em torno da posição de equilíbrio estático: $10°$, $-7°$, $4.9°$, $-3.4°$.

Considerando uma massa $m = 3\text{kg}$ concentrada em C e desprezando a massa das barras $\overline{AB}$ e $\overline{OC}$, estabelecer:

a) (20%) a equação diferencial do movimento.

Para $a = 0.04$ m, determinar:

b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

c) (10%) a razão de amortecimento ξ;

d) (10%) o valor da constante c de cada amortecedor;

e) (10%) o período natural de vibração T_d.

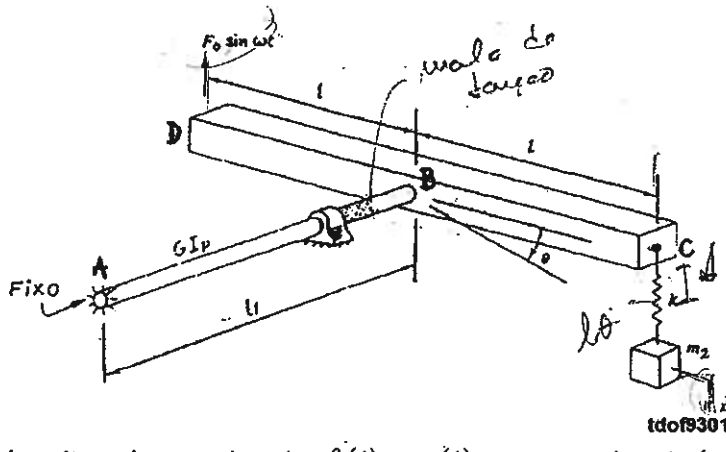
Admitindo uma perturbação inicial $\dot{\theta}_0 = 10\ rad/s$,

f) (15%) determinar o instante em que o sistema passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio estático;

g) (15%) determinar a energia dissipada pelo sistema até regressar definitavamente à posição de equilíbrio estático.

Para uma solicitação harmónica $M(t) = M_0 \cos \omega t$,

h) (10%) determinar a(s) frequência(s) ω de excitação que assegure um factor de amplificação dinâmica inferior a $\sqrt{2}$.



2) O sistema representado na figura é constituído por um veio fixo em A e ligado em B a uma barra rígida de massa m_1. Na extremidade C da barra está ligada uma mola de rigidez k a qual se encontra ligada a uma massa concentrada m_2. Na extremidade D da barra está aplicada uma solicitação harmónica $f(t) = F \sin \omega t$.

O movimento do sistema a partir da posição de equilíbrio estático é descrito pelas coordenadas $\theta(t)$ e $x(t)$ e a massa do veio é desprezável face à massa da barra.

a) (20%) Escrever literalmente as equações do movimento utilizando o formalismo de Lagrange.

Para os valores numéricos seguintes:

$$m_1 = m_2 = 3m \qquad \ell_1 = \ell = 1\ \text{m} \qquad k = 160\ \text{N•m}^{-1} \qquad GI_p = 80\ \text{N•m}^2$$

b) (20%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração;

c) (10%) Representar graficamente as formas naturais de vibração;

d) (10%) Escrever as equações do movimento na base modal;

e) (20%) Para a solicitação harmónica $f(t) = F_0 \sin \omega t$, determinar a amplitude da resposta $x(t)$ e $\theta(t)$ para $m = 2$ kg e $\omega = 8$ rad•s^{-1}. Comentar o resultado. Esboçar graficamente a variação das amplitudes de resposta em função da frequência.

f) (20%) Redimensionar a constante de rigidez k da mola de modo que a frequência fundamental do sistema seja inferior a 2 rad•s^{-1}.

3) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ está encastrada na extremidade $x = 0$ e, na extremidade $x = \ell$ está apoiada por uma mola elástica linear e por uma mola elástica angular de rigidez k_ℓ e k_r respectivamente, conforme se representa na figura.

a) (15%) Escrever as condições de fronteira do sistema.

b) (15%) Estabelecer, justificando, as condições de aplicabilidade da função polinomial $V(x) = ax^2 + bx + c$ como aproximação da forma fundamental de vibração no método da energia de Rayleigh.

c) (20%) Determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

d) (20%) Discutir a aplicabilidade da função de aproximação proposta para os seguintes valores limite da rigidez:

i) $k_\ell \to 0$ e $k_r \to 0$

ii) $k_\ell \to 0$ e $k_r \to \infty$

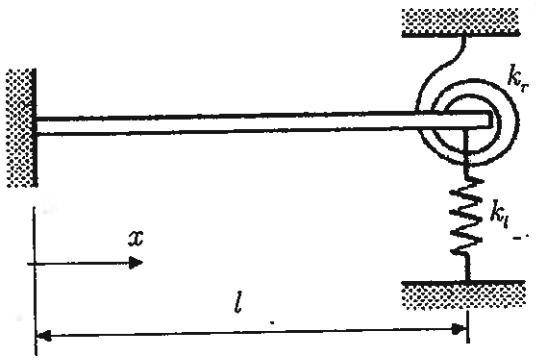
iii) $k_\ell \to \infty$ e $k_r \to 0$

iv) $k_\ell \to \infty$ e $k_r \to \infty$

e) (15%) Determinar o valor aproximado da frequência fundamental de vibração da viga quando $k_\ell = k_r = 0$, e comparar com o correspondente valor exacto. Comentar.

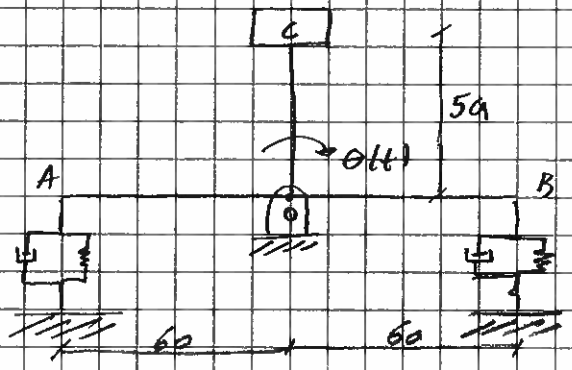
Utilizando as funções de aproximação $\psi_1(x) = \left(\frac{x}{\ell}\right)^2$ e $\psi_2(x) = \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$ e o método de Rayleigh-Ritz,

f) (15%) determinar os coeficientes da matriz de rigidez $[k]$.



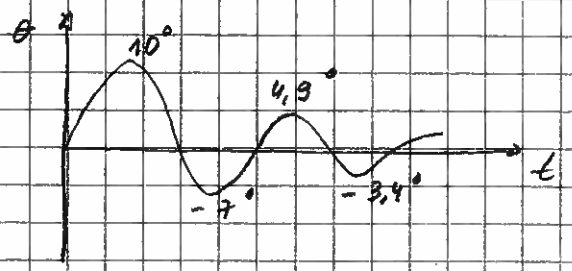
Exame 2007/01/15

Exercício 1



Deslocamento angular máximo:

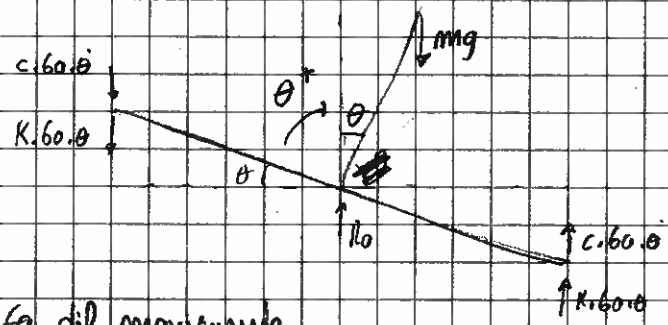
$10°, -7°, 4{,}9°, -3{,}4°$



$m = 3\ Kg$

a) Diagrama Corpo Livre Dinâmico

linearizando para pelo série de Taylor. $\operatorname{sen}\theta \simeq \theta$, $\cos\theta \simeq 1$



Eq. dif. movimento

$$mg.5a\operatorname{sen}\theta - 2.(6aK\theta.6a\cos\theta) - 2.(6ac\dot\theta.6a\cos\theta) = J_0\ddot\theta$$

$$\Leftrightarrow 5a\theta mg - 72a^2K\theta - 72a^2c\dot\theta = J_0\ddot\theta$$

$$J_0 = \underbrace{J_0^b}_{=0} + J_0^m = \underbrace{J_G^m}_{=0} + md^2 = m.(5a)^2$$

Eq. mov.

$$25m\cancel{a^2}\ddot\theta + 72\cancel{a^2}c\dot\theta + 72\cancel{a^2}K\theta - 5\cancel{a}\frac{\theta}{a}mg = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Rightarrow 25m\ddot\theta + 72c\dot\theta + \left(72K - \frac{5mg}{a}\right)\theta = 0$$

b) $a = 0{,}04\ m$ $\quad m = 3\ Kg$ $\quad \omega_n = ?$

Eq. mov $\Rightarrow$ $\underbrace{75}_{m_{eq}}\ddot\theta + \underbrace{72c}\dot\theta + \underbrace{10725}_{K_{eq}}\theta = 0$ $\quad \omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} = 11{,}96\ rad/s$

c) $\xi = ?$

Atendendo ao reg. livre e harmónico vemos calcular a razão de amortecimento pelo decremento logarítmico

$$\delta = \frac{1}{1}.\ln\frac{10}{4{,}9} = 0{,}7134 \Rightarrow \xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2+\delta^2}} = \boxed{0{,}113} \rightarrow \text{Sistema sub-amortecido}$$

d) o valor da constante c

$$\xi = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \cdot \omega_n} \Leftrightarrow 0{,}113 = \frac{72\,c.}{2 \times 15 \times 11{,}96} \Leftrightarrow c = 2{,}82 \ Ns/m$$

e) Período natural de vibração T_d

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \qquad \omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2} = 11{,}96 \cdot \sqrt{1-0{,}113^2}$$

$$= 11{,}9 \ rad/s$$

$$T_d = 0{,}53 \ s \ //$$

f) $\dot{\theta}_0 = 10 \ rad/s$

Sistema sub-amortecido

resposta: $x(t) = A e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad A_1 = 0 \qquad A_2 = \frac{\dot{\theta}_0 + 0}{\omega_d} = \frac{10}{11{,}9} = 0{,}84$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1} = \tan^{-1} \frac{0{,}84}{0} = \frac{\pi}{2} \qquad A = 0{,}84$$

$$0 = 0{,}84 \cdot e^{-0{,}113 \cdot 11{,}96 \cdot t} \cdot \cos(11{,}9 \cdot t - \pi/2) \Leftrightarrow t = 0{,}045 \ s$$

g)

07/10/15

1.b) $\omega = ?$ $\quad \mu < \sqrt{2}$

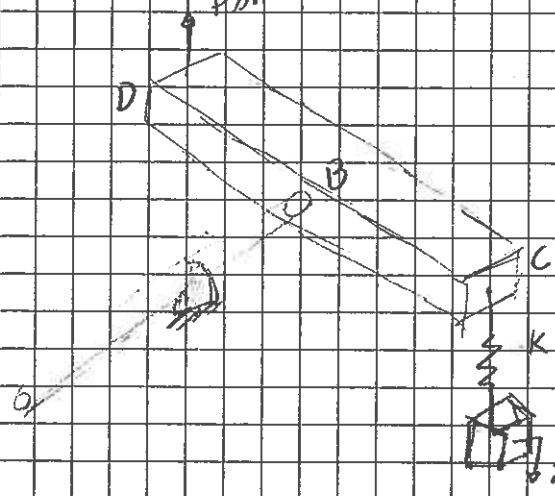
para $\xi = 0,113$ $\quad \mu = \dfrac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (0,226\beta)^2}} < \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-\beta^2)^2 + (0,226\beta)^2} < 2 \Rightarrow \beta_1 = 0,551 \Rightarrow \omega_1 = 0,551 \times 11,96 = 6,6 \text{ rad/s}$$

$$\beta_2 = 1,283 \Rightarrow \omega_2 = 1,283 \times 11,96 = 15,34 \text{ rad/s}$$

Exercício 2



1º grau de liberdade - θ

2º grau de liberdade - x

$$K_1 = \frac{M_t}{\theta} = \frac{6 \cdot I_p}{l_1}$$

a) Eq. do movimento utilizando o formalismo de Lagrange

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = F \sin \omega t \qquad \frac{1}{2} k (\Delta x)^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

Energia Cinética: $T = \frac{1}{2} I_b \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

$I_b = \frac{1}{12} m_1 (2l)^2 = \frac{4}{12} m_1 l^2 \qquad = \frac{2}{12} m_1 \cdot l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

$= \frac{2}{12} \cdot 3m \cdot l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{3}{2} m \dot{x}^2$

$= \frac{1}{2} m l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{3}{2} m \dot{x}^2$

$$V = \frac{1}{2} k_t \cdot \theta^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{1}{2} \frac{6 I_p}{l_1} \cdot \theta^2 + \frac{1}{2} k (l\theta - x)^2$$

Δx de mola

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = m l^2 \dot{\theta} \qquad \frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = 3m\dot{x} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m l^2 \ddot{\theta} \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 3m\ddot{x}$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = \frac{6 I_p \theta}{l} + l k (l\theta - x) \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = -k(l\theta - x)$$

$$\begin{cases} mL^2\ddot{\theta} + \left(\frac{6I_p\theta}{L} + lK(\theta l - x)\right) = LF_0 \sin \omega t \\ 3m\ddot{x} - K(l\theta - x) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} mL^2\ddot{\theta} + \left(\frac{6I_p}{L} + l^2K\right)\theta - lKx = LF_0 \sin \omega t \\ 3m\ddot{x} + Kx - Kl\theta = 0 \end{cases}$$

na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} mL^2 & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 6I_p/l + l^2K & -lK \\ -lK & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} LF_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $l_1 = l = 1m \quad K = 160\ N/m \quad 6I_p = 80\ N.m^2$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Problema característico: $\Delta(\omega) = |[K] - \omega^2[m]| = 0$

$$\begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 240 - m\omega^2 & -160 \\ -160 & 160 - 3m\omega^2 \end{vmatrix} = (240 - m\omega^2).(160 - 3m\omega^2) - (-160)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = \frac{3,92}{\sqrt{m}} \qquad \omega_2 = \frac{16,67}{\sqrt{m}}$$

Formas modais de vibração:

- $\omega_1 = \frac{3,92}{\sqrt{m}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 240 - m.\frac{3,92^2}{m} & -160 \\ -160 & 160 - 3m.\frac{16,67^2}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$(240 - 3,92^2).U_{11} - 160\,U_{21} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_{11}}{U_{21}} = 0,71 \Rightarrow \{U\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,71 \\ 1 \end{Bmatrix}$

- $\omega_2 = \frac{16,67}{\sqrt{m}} \Rightarrow \begin{bmatrix} 240 - m.\frac{16,67^2}{m} & -160 \\ -160 & 160 - 3m.\frac{16,67^2}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

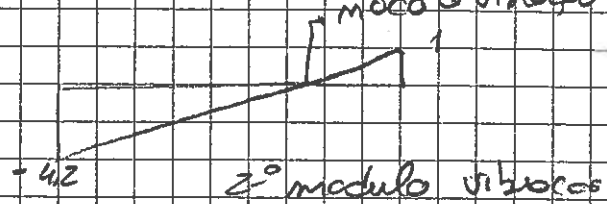
$(240 - m.16,67^2)\,U_{12} - 160\,U_{22} = 0 \Leftrightarrow \frac{U_{12}}{U_{22}} = -4,2 \rightarrow \{U\}_2 = \begin{Bmatrix} -4,2 \\ 1 \end{Bmatrix}$

007/01/15 2.c)



1.º módulo vibração

(as massas movimentam-se em fase)



2.º modulo vibração

(as massas movimentam-se em oposição de fase)

d) equações do movimento na base modal

vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{\{u\}_1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} = \begin{Bmatrix} 0{,}38/\sqrt{m} \\ 0{,}53/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{\{u\}_2}{\sqrt{\{u\}_2^T \cdot [m] \cdot \{u\}_2}} = \begin{Bmatrix} -0{,}92/\sqrt{m} \\ 0{,}22/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

matriz modal

$$\phi = \begin{array}{cc} 11 & 12 \\ \end{array}$$
$$\phi = \begin{bmatrix} \frac{0{,}38}{\sqrt{m}} & -\frac{0{,}92}{\sqrt{m}} \\ \frac{0{,}53}{\sqrt{m}} & \frac{0{,}22}{\sqrt{m}} \end{bmatrix}$$
$$\begin{array}{cc} & 22 \end{array}$$

$$\underbrace{[\phi]^T [m] [\phi]}_{[I]} \{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{[\phi]^T \cdot [k] [\phi]}_{[\Omega]^2} \{\eta(t)\} = [\phi]^T \{f(t)\}$$

(devido à ortogonalidade dos vectores modais)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \phi_{11} f_1(t) + \phi_{21} f_2(t) \\ \phi_{12} f_1(t) + \phi_{22} f_2(t) \end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + \frac{15{,}4}{\sqrt{m}} \eta_1(t) = \frac{0{,}38\, F_0}{\sqrt{m}} \\ \ddot{\eta}_2(t) + \frac{277{,}9}{\sqrt{m}} \eta_2(t) = \frac{-0{,}92\, F_0}{\sqrt{m}} \end{cases}$$

e) $f(t) = F_0 \sin \omega t$ $\quad x(t)$ e $\theta(t)$ $\quad m = 2\,kg$ $\quad \omega = 8\ rad/s$

amplitude da resposta $x(t)$ e $\theta(t)$

$$\theta(\omega) = \frac{Z_{22} F_1 - Z_{12} F_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} \qquad X(\omega) = \frac{Z_{11} F_2 - Z_{12} F_1}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 240 - 8^2 \times 3 \times 2 & -160 \\ -160 & 160 - 8^2 \times 3 \times 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -144 & -160 \\ -160 & -224 \end{bmatrix}$$

$$\theta(\omega) = \frac{-224 \times F_0}{-144 \times (-224) - (-160)^2} = -0{,}004\, F_0\ [m]$$

$$X(\omega) = \frac{-160 \times F_0}{} = -0{,}003\, F_0\ [m]$$

Qu

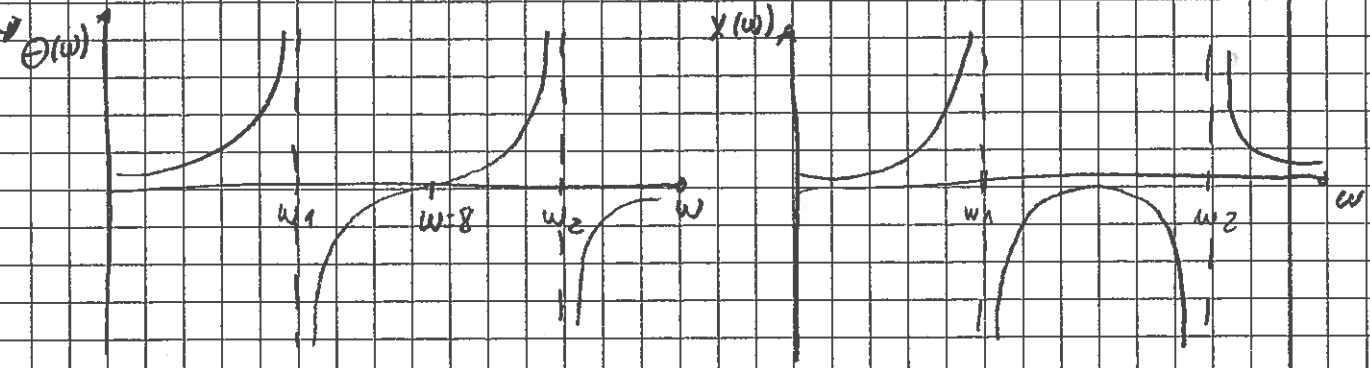
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$\theta(t) = \Theta(\omega) \cos \omega t \Rightarrow \ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \cdot \Theta(\omega) \cos \omega t$

$x(t) = X(\omega) \cos \omega t \Rightarrow \ddot{x}(t) = -\omega^2 \cdot X(\omega) \cos \omega t$

$$\begin{cases} -2\omega^2 \cdot \Theta(\omega) \cos \omega t + 240 \cdot \Theta(\omega) \cos \omega t - 160 X(\omega) \cos \omega t = F_0 \\ -6\omega^2 \cdot X(\omega) \cos \omega t - 160 \Theta(\omega) \cos \omega t + 160 X(\omega) \cos \omega t = 0 \end{cases}$$

f) Dimensionar constante K para freq. fund. < 2 rad/s



$\omega < \omega_1 \Rightarrow$ as massas movem-se em fase
$\omega > \omega_2 \Rightarrow$ " " " " opostos de fase.

f) $\omega = 2$ rad/s

matriz de rigidez $K = \begin{bmatrix} 80+K & -K \\ -K & K \end{bmatrix}$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 80+K-24 & -K \\ -K & K-24 \end{bmatrix}$$

$K \downarrow \omega \downarrow$

$$-0{,}004 \cancel{F_0} = \frac{(K-24) \cdot \cancel{F_0}}{(56+K)(K-24) - (-K)^2} \Rightarrow K = \underline{22{,}5} \text{ N/m}$$

$\Downarrow$

faz sentido pois para uma "suspensão" mais macia menor a frequência !!

007 10115

Exercício 3

· comprimento l / secção reta A / momento 2º ordem I / E / ρ

$x=0 \Rightarrow$ encastrada



a) condições de fronteira

$x=0$ | · $V(x=0)=0$ (deslocamento)

| · $\frac{dV}{dx}(x=0)=0$ (declive)

$x=l$ | · $EI\frac{d^2V}{dx^2}(x=l)=0$ (Momento)

| · $EI\frac{d^3V}{dx^3}(x=l)=0$ (Esf. Transversa)

b) $V(x) = ax^2+bx+c$

Atendendo a que se trata de um caso de flexão o sistema é de 4ª ordem. De modo à função ser aplicável terá de ser derivável pelo menos duas vezes de ordem do sistema.

$V'(x) = 2ax+b \qquad V''(x) = 2a$

Tem também de satisfazer as condições de fronteira:

$V(x=0)=0 \Leftrightarrow a\times 0^2+b\times 0+c=0 \Rightarrow c=0$

$V'(x=0)=0 \Leftrightarrow 2a\times 0+b=0 \Rightarrow b=0$

Logo a função terá de ser $v(x)=ax^2$

c) Determinar uma estimativa da freq. fund. vibração.

Pelo método da energia de Rayleigh e para vibração de flexão de vigas temos:

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI(x)\left(\frac{d^2V(x)}{dx^2}\right)^2 dx + V_{efm}$$

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A(x)\,(V(x))^2 dx + T_{efm}\right)$$

$$V_{max} = \frac{1}{2}\int_0^l EI(2a)^2 + \frac{1}{2}K_{ang}(2ax)^2 + \frac{1}{2}Kl\cdot(ax^2)^2\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\left[EI\,4a^2x\Big|_0^l + \frac{1}{2}K_{ang}\frac{4}{3}a^2x^3\Big|_0^l + \frac{1}{10}Kl\cdot a^2x^5\Big|_0^l\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(EI4a^2l + \frac{2}{3}K_{ang}a^2l^3 + \frac{1}{10}Kl\cdot a^2l^5\right)$$

$$T_{max} = \omega^2\left(\frac{1}{2}\int_0^l \rho A(ax^2)^2 dx\right) = \omega^2\frac{1}{2}\rho A\frac{1}{5}a^2x^5\Big|_0^l = \frac{1}{10}\omega^2\rho A a^2 l^5$$

$V_{máx} = T_{máx}$

$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{1}{2}}\left(EI\,4\cancel{a^2}\,l + \frac{2}{3} K_a \cancel{a^2} l^3 + \frac{1}{10} K_l \cancel{a^2} l^5 \right) = \cancel{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{5} \omega^2 \rho A \cancel{a^2} l^5 \right)$$

$$\Rightarrow \omega^2 = \frac{4EI + \frac{2}{3} K_a l^2 + \frac{1}{10} K_l l^4}{\frac{1}{5} \omega^2 \rho A l^4} \Rightarrow \omega = \sqrt{\ldots}$$

d)

i) $K_l \to 0 \quad K_T \to 0$

