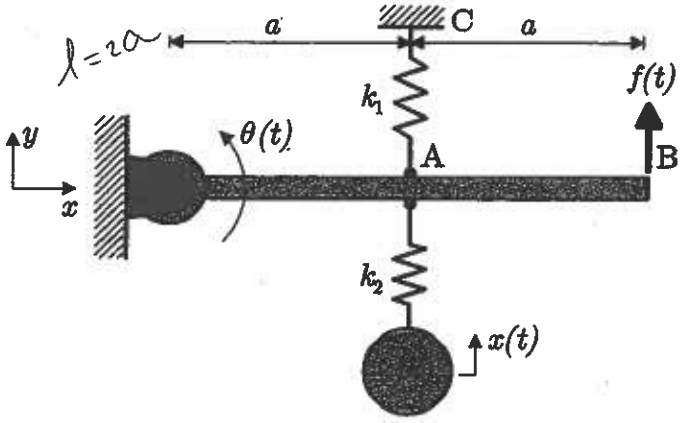


2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma barra rígida de massa m_1, de comprimento ℓ, articulada no ponto O, ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de constante de rigidez k_1 e sobre a qual actua uma força $f(t)$ no ponto B. No ponto A está ligada uma mola linear elástica de constante de rigidez k_2 da qual está suspensa uma massa concentrada m_2. As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $x(t)$.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange. Para

$$k_1 = 10k \qquad k_2 = 2k \qquad m_1 = 6m \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\,\text{m},$$

b) (15%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

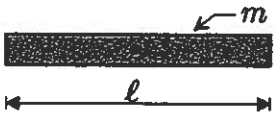
c) (15%) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

Para $k = 25600$ N/m e $m = 1$ kg,

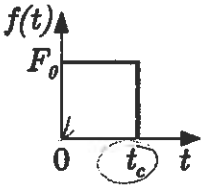
d) (20%) Determinar a amplitude $\Theta(\omega)$ da resposta da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 178$ rad/s. Esboçar graficamente a variação da amplitude $\Theta(\omega)$ em função da frequência de excitação ω, assinalando eventuais pontos notáveis.

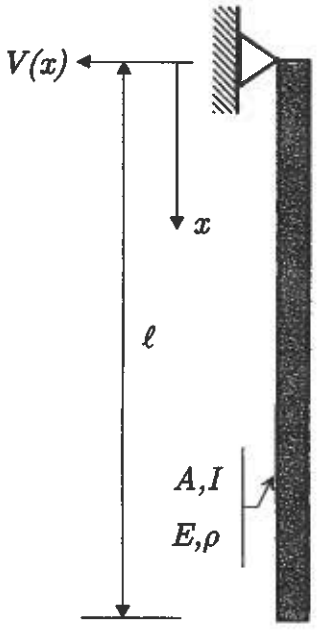
e) (20%) Determinar o valor máximo da resposta $x(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.0137$ s. Comentar.

Nota:



$$J_G = \frac{1}{12}m\ell^2$$





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, e de material de módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ está apoiada na extremidade $x = 0$ e está livre na extremidade $x = \ell$, conforme se representa na figura.

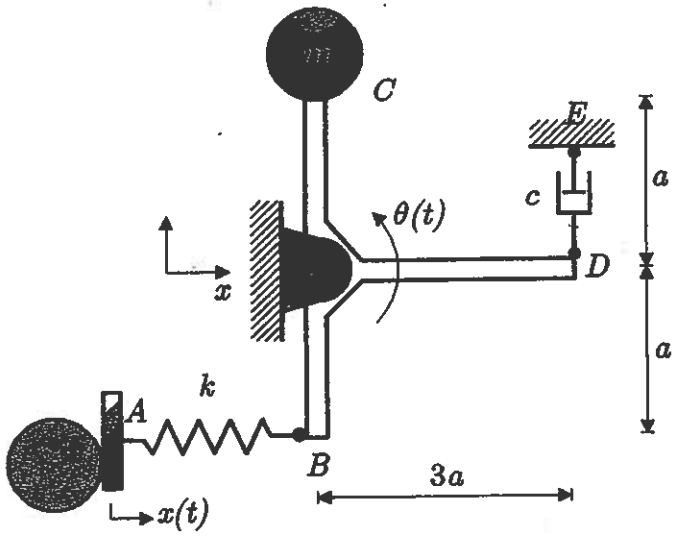
a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (15%) Discutir, justificando, as condições de aplicabilidade da função $V(x) = \alpha x - \delta \sin\frac{\pi}{\ell}x$ como aproximação da forma fundamental de vibração no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função.

c) (30%) Calcular a energia potencial máxima, a energia cinética máxima e o quociente de Rayleigh para determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração.

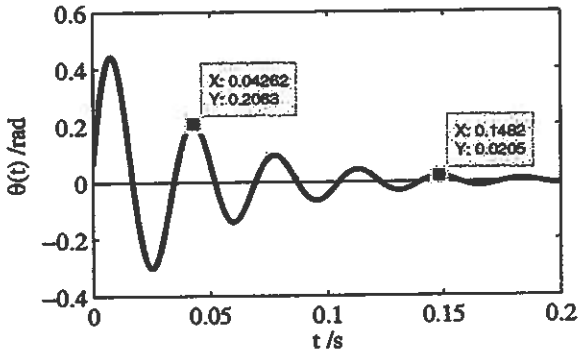
d) (30%) Determinar o valor óptimo do parâmetro α e a estimativa óptima da frequência. Justificar o procedimento utilizado. Comparar com a solução exacta. Comentar.

e) (10%) Determinar as coordenadas de eventuais pontos nodais.



1) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por duas barras rígidas ligadas em T e por uma massa concentrada m (ponto C). O sistema oscila ($\theta(t)$) em torno do ponto O por acção de um deslocamento $x(t)$ aplicado ao ponto A por um excêntrico. O movimento imposto $x(t)$ transmite-se ao sistema através de uma mola de rigidez k e é controlado por um amortecedor viscoso de constante c (ponto D).

Num ensaio em regime livre, foi registada a resposta $\theta(t)$ representada no gráfico.



Determinar,

a) (10%) a razão de amortecimento ξ;
b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n.

Assumindo a hipótese de pequenas oscilações e considerando desprezável a inércia das barras, estabelecer:

c) (30%) a equação diferencial (linearizada) do movimento.

Para os valores numéricos $a = 0.5$ m e $k = 5 \times 10^4$ N/m, determinar:

d) (10%)a massa concentrada m;

Para um deslocamento harmónico $x(t) = X \sin \omega t$ com $\omega = 360\,\text{rad/s}$, a amplitude de vibração da massa m é igual a $10\,\text{mm}$.

e) (20%) determinar a amplitude X do deslocamento imposto;
f) (20%) determinar a(s) frequência(s) ω de excitação que assegure(m) uma amplitude $\Theta(\omega)$ inferior a $5°$.

07/06/00

Exercício 3

comprimento l / secção recta A / momento 2º ordem I



a) Condições de fronteira

$x=0$ → Deslocamento nulo $V(x=0)=0$ (geométrica)

→ Momento nulo $EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x=0)$ (natural)

$x=l$ → Esf. Transverso nulo $EI \frac{\partial^3 V}{\partial x^3}(x=l)$ (natural)

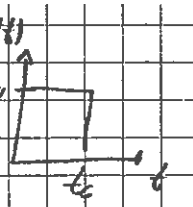
→ Momento nulo $EI \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x=l)$ (natural)

b) $V(x) = \alpha x - \beta \sin \frac{\pi}{l} x$

Para a função ser aplicável ao caso em estudo, esta tem de ser derivável, no mínimo, metade das vezes da ordem do sistema. Como a função em apreço é trigonométrica, esta poderá ser derivada n vezes, logo é aplicável.

c)

e) valor máximo do deslocamento $x(t)$ para $t_c = 0{,}0137$ s.



Faremos a análise na base modal

para $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{25600} \Rightarrow T_1 = \frac{2\pi}{\sqrt{25600}} = 0{,}03927$ s

para $\omega_2 = \sqrt{\frac{2{,}5K}{m}} = \sqrt{2{,}5 \times 25600} \Rightarrow T_2 = \frac{2\pi}{\sqrt{2{,}5 \times 25600}} = 0{,}02484$ s

Pelo espectro de resposta ao choque retangular:

$$\frac{t_c}{T_1} = \frac{0{,}0137}{0{,}03927} = 0{,}35 \Rightarrow \frac{M_{1\,max}}{\frac{Fo}{K}} = 1{,}8 \Rightarrow M_{1\,max} = 1{,}8 \times \frac{0{,}58\,Fo}{25600} = 4{,}1 \times 10^{-5} Fo$$

$$\frac{t_c}{T_2} = \frac{0{,}0137}{0{,}02484} = 0{,}55 \Rightarrow \frac{M_{2\,max}}{\frac{Fo}{K}} = 2{,}1 \Rightarrow M_{2\,max} = \frac{2 \times 6{,}41\,Fo}{2{,}5 \times 25600} = 1{,}3 \times 10^{-5} Fo$$

Resposta nas coordenadas generalizadas

$$\begin{Bmatrix} \theta_{max} \\ x_{max} \end{Bmatrix} = [\Phi] \cdot \begin{Bmatrix} M_{1\,max} \\ M_{2\,max} \end{Bmatrix}$$

$$x_{max} = \Phi_{21} \cdot M_{1\,max} + \Phi_{22} \cdot M_{2\,max}$$

$$= 0{,}58 \times 4{,}1 \times 10^{-5} Fo + (-0{,}82) \times 1{,}3 \times 10^{-5} Fo = \boxed{1{,}3 \times 10^{-5} Fo}$$

10/06/20

c) Escrever as equações do movimento do sistema na base modal.

$K = 25600$ N/m $m = 1$ kg

Transformação de coordenadas $x(t) = [T]\{\eta(t)\}$

Assim Procedemos com 2 eq. independentes ou desacopladas

$\ddot{\eta}_i(t) + \omega_i^2 \eta(t) = N_i(t) = \Phi \cdot f(t)$ $[m] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

vectores modais normalizados

$$\Phi_1 = \frac{1}{\sqrt{\{\Phi_1\}^T [m] \{\Phi_1}} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}58 \\ 0{,}58 \end{Bmatrix}$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{\sqrt{\{\Phi_2\}^T \cdot [m] \cdot \{\Phi_2}} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}41 \\ -0{,}82 \end{Bmatrix}$$

Matriz modal

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0{,}58 & 0{,}41 \\ 0{,}58 & -0{,}82 \end{bmatrix} \qquad \Phi^T = \begin{bmatrix} 0{,}58 & 0{,}58 \\ 0{,}41 & -0{,}82 \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{[\Phi]^T [m] [\Phi]}_{[I]} \{\ddot{\eta}(t)\} + \underbrace{[\Phi]^T \cdot [K] [\Phi]}_{[\Omega^2]} \{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$$

Equações do movimento

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 25600 \cdot \eta(t) = 0{,}58 \cdot f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 64000 \cdot \eta(t) = 0{,}41 \cdot f(t) \end{cases}$$

Za F

d) $\Theta(\omega)$ para $f(t) = F \cos \omega t$ $\omega = 178$ rad/s

para um sistema com 2 graus de liberdade é necessário a amplitude $\Theta(\omega)$ será:

$$\Theta(\omega) = \frac{Z_{22} F_1 - Z_{12} F_2}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} \qquad [Z] = \begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix}$$

$$[Z] = \begin{bmatrix} 45116 & -25600 \\ -25600 & 19516 \end{bmatrix} \qquad \Theta(\omega) = \frac{19516 \cdot 2.05 \cdot F - 0}{45116 \cdot 19516 - (-25600)^2}$$

$$= 7{,}94 \times 10^{-4} F.$$

ou

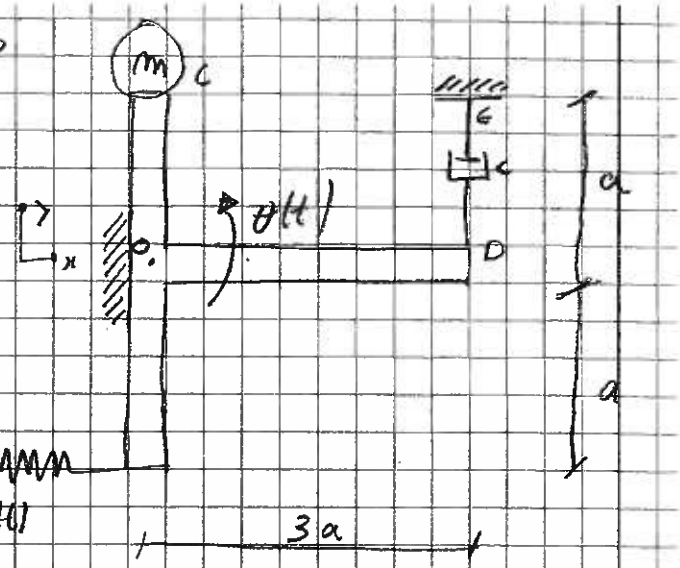
$$\begin{cases} \theta(t) = \Theta(\omega) \cos \omega t \\ x(t) = X(\omega) \cos \omega t \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \ddot{\theta}(t) = -\omega^2 \Theta(\omega) \cos \omega t \\ \ddot{x}(t) = -\omega^2 x(\omega) \cos \omega t \end{cases}$$

$$[m] \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + [K] \cdot \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2aF \\ 0 \end{Bmatrix}$$ resolver e tirar $\Theta(\omega)$

Exame 1ª chamada 2007/06/20

Parte prática

Exercício 1



a) razão de amortecimento ξ

Através do decremento logarítmico vamos determinar a razão de amortecimento

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2 = t_1 + NT)}$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \ln \frac{0,2063}{0,0205} = 0,78$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} = \frac{0,78}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0,78^2}} = 0,123 \Rightarrow \text{Sistema Sub-amortecido}$$

b) frequência angular natural não amortecida ω_n

$$T = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}}$$

$$T = \frac{0,1482 - 0,04262}{3}$$

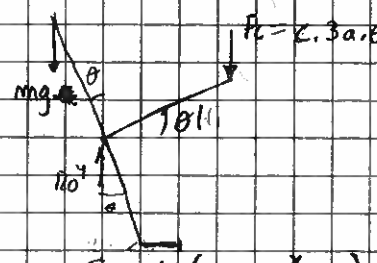
$$= 0,0352 \text{ s}$$

$$\Rightarrow \omega_n = \frac{2\pi}{0,0352 \cdot \sqrt{1 - 0,123^2}}$$

$$= 179,87 \text{ rad/s}$$

c) a equação diferencial linearizada do movimento

Diagrama de corpo livre direcionado



$$mg \cdot a \sin\theta - c(3a\dot{\theta}) \cdot 3a \cos\theta + k(x - a\theta) \cdot a \cos\theta = J_0\ddot{\theta}$$

linearizando $\begin{cases} \sin\theta \simeq \theta \\ \cos\theta \simeq 1 \end{cases}$

$$J_0\ddot{\theta} - mga\theta + 9ca^2\dot{\theta} - kxa + ka^2\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow J_0\ddot{\theta} + 9a^2c\dot{\theta} + (ka^2 - mga)\theta - ka\,x(t) = 0$$

$$J_0\ddot{\theta} = \overrightarrow{K_0} = \overrightarrow{OC} \times m\,\ddot{\overrightarrow{OC}}$$

$$\overrightarrow{OC} = \begin{vmatrix} -a\sin\theta \\ a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \quad \dot{\overrightarrow{OC}} = \begin{vmatrix} -a\dot{\theta}\cos\theta \\ -a\dot{\theta}\sin\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -a\sin\theta \\ a\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix} \times m \begin{vmatrix} -a\ddot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}^2\sin\theta \\ -a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$= -a\sin\theta\, m(-a\ddot{\theta}\sin\theta - a\dot{\theta}^2\cos\theta) - ma\cos\theta(-a\ddot{\theta}\cos\theta + a\dot{\theta}^2\sin\theta)$$

$$= +a^2m\ddot{\theta}\sin^2\theta + a^2m\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta + a^2m\ddot{\theta}\cos^2\theta - a^2m\dot{\theta}^2\sin\theta\cos\theta$$

Equação final

$$ma^2\ddot{\theta} + 9a^2c\dot{\theta} + (ka^2 - mga)\dot{\theta} - kx(t)a = 0$$

d) $a = 0{,}5\ m$ $\quad K = 5\times10^4\ N/m$

Equação do movimento

$$0{,}25\,m\ddot{\theta} + 2{,}25\,c\dot{\theta} + (12500 - 4{,}9\,m)\theta - 5\times10^4 x(t).a = 0$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow 179{,}87 = \sqrt{\frac{12500 - 4{,}9\,m}{0{,}25\,m}} \Leftrightarrow m = 1{,}545\ Kg$$

e) $x(t) = X \sin \omega t$ $\quad \omega = 360\ rad/s$ $\quad X_{resp} = 10\ mm$

$X = ?$

A resposta a um movimento de entrada do tipo $x(t)$ será

$$x_{permanente}(t) = X(\omega)\cos(\omega t - \phi)$$

esta é a amplitude entrando com o braço a

$$X(\omega) = X_s \cdot \mu \qquad X(\omega)_0 = \frac{0{,}01}{a} = \frac{0{,}01}{0{,}5} = 0{,}02\ m$$

$$= \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \cdot \mu$$

μ para $\beta = \frac{360}{179{,}87} = 2$

$$0{,}02 = \frac{5\times10^4 \cdot X \cdot 0{,}5}{12500 - 4{,}9\times1{,}545} \cdot 0{,}3282 \Leftrightarrow X = 0{,}0305\ m$$

f) as frequências de excitação que assegurem $\theta(\omega) < 5°$

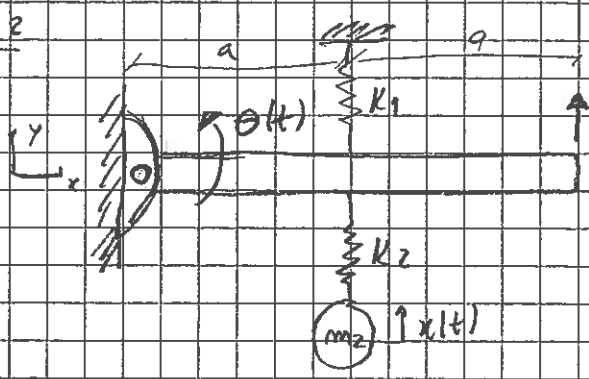
$$\theta(\omega) = 0{,}5 \times \operatorname{sen} 5 = 0{,}044\ m$$

$$0{,}044 = \frac{5\times10^4 \times 0{,}0305 \times 0{,}5}{12500 - 4{,}9\times1{,}545} \cdot \mu \Rightarrow \mu = 0{,}721$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \Rightarrow \beta =$$

007106120

Exercício 2



Sistema com dois graus de liberdade $\theta(t)$ e $x(t)$

a) Equações de movimento utilizando o formalismo de Lagrange

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = \cdots$$

E. Cinética $T = \frac{1}{2} m v^2$

E. Potencial $V = \frac{1}{2} k x^2$

1º grau de liberdade → $\theta(t)$

2º grau de liberdade → $x(t)$

$$T = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}(t)^2 + \frac{1}{2} y_0 \cdot \dot{\theta}(t)^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^2 + m \dot{\theta}(t)^2$$

$$y_0 = y_G + m \cdot d^2$$

$$= \frac{1}{12} \cdot m_1 \cdot 4 \cdot a^2 + m_1 a^2 = \frac{1}{12} \cdot 6m \cdot 4a^2 + 6m a^2 = 2m$$

$$V = \frac{1}{2} K_1 (a \cdot \operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2} K_2 (a \operatorname{sen}\theta - x(t))^2 \qquad \operatorname{sen}\theta \simeq \theta$$

$$= \frac{1}{2} K_1 a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} K_2 (a\theta - x(t))^2$$

$$\theta(t) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = f(t) \cdot 2a \right.$$

$$x(t) \quad \left\{ \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x}^{=0} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \right.$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t}\left(2m\dot{\theta}(t)\right) + K_1 a^2 \theta(t) + K_2 a (a\theta - x(t)) = f(t) \cdot 2a \\ \frac{\partial}{\partial t}\left(m \dot{x}(t)\right) + -K_2 (a\theta - x(t)) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{\theta}(t) + K_1 a^2 \theta(t) + K_2 a^2 \theta - K_2 a x(t) = f(t) \\ m\ddot{x}(t) - K_2 a \theta + K_2 x(t) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2m\ddot{\theta}(t) + (K_1 a^2 + K_2 a^2)\theta(t) - a K_2 x(t) = f(t) \cdot 2a \\ m\ddot{x}(t) + K_2 a \theta + a K_2 x(t) = 0 \end{cases}$$

$K_1 = 10\,K \qquad K_2 = 2K \qquad a = 0{,}5\,m$

$$\begin{cases} 2m\ddot{\theta}(t) + k \cdot \theta(t) - a \cdot 2K x(t) = f(t) \cdot 2a \\ m\ddot{x}(t) - K\theta(t) + 2K x(t) = 0 \end{cases}$$

→ o ponto pode ser apoiado em O.

b) Determinar as frequências e formas modais do vibrador.

Notação matricial:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2a\,p(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Problema característico:

$$\Delta(\omega) = |[K] - \omega^2[m]| = 0$$

$$\begin{bmatrix} 3K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3K - 2m\omega^2 & -K \\ -K & 2K - m\omega^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow (3K - 2m\omega^2)\cdot(2K - m\omega^2) - (-K)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

Simplificando na máquina: $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$ $\omega_2 = \sqrt{\frac{2{,}5K}{m}}$

frequências naturais da vibração.

- $\omega_1 = \sqrt{\frac{K}{m}}$

$$\begin{bmatrix} 3K - 2m\frac{K}{m} & -K \\ -K & 2K + m\frac{K}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} K & -K \\ -K & 3K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_{11} \\ U_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \quad K U_{11} - K U_{21} = 0$$

$$U_{11} = U_{21} \Rightarrow \{U\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

- $\omega_2 = \sqrt{\frac{2{,}5K}{m}}$

$$\begin{bmatrix} 3K - 2m\frac{2{,}5K}{m} & -K \\ -K & 2K - m\cdot\frac{2{,}5K}{m} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 3K - 5K & -K \\ -K & 0{,}5K \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_{12} \\ U_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow \quad -2K U_{12} - K U_{22} = 0$$

$$\Leftrightarrow U_{22} = -2U_{12} \Rightarrow \{U\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

1º modo natural de vibração:

$$\{x(t)\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{K}{m}}\cdot t - \phi_1\right)$$

2º modo $\{x(t)\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix} \cos\left(\sqrt{\frac{2{,}5K}{m}}\cdot t - \phi_2\right)$

d) Para optimizar α devemos fazer $\frac{\partial \omega^2}{\partial \alpha} = 0$

$$\omega^2 = \frac{2^2 EI\delta\pi^2}{\rho A l^2} \cdot \frac{1}{\alpha\pi l - 4\delta}$$

$$\frac{\partial \omega^2}{\partial \alpha} = -\frac{4\pi^2 EI\delta}{\rho A l^2} \frac{\pi l}{|\alpha\pi l - 4\delta|^2} = 0$$

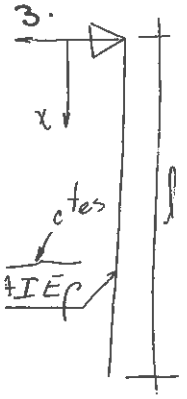
$$(\alpha\pi l - 4\delta)^{-2} = 0$$

$$\alpha = \frac{4\delta}{\pi l}$$

e) Nodos de vibração : tab 22.2 p 381

0, 0,736

3.



a) Condições de Fronteira

barra em apoio simples - livre

$v(0,t) = 0$ g

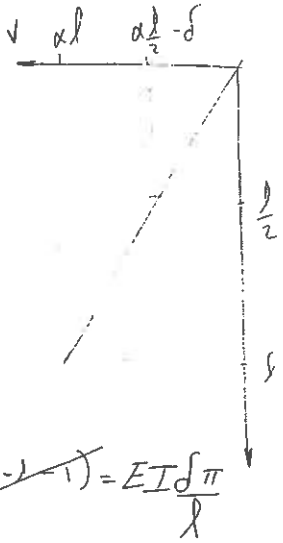
$EI \frac{\partial^2 v(0,t)}{\partial x^2} = 0$ n

$EI \frac{\partial^3 v(l,t)}{\partial x^3} = 0$ n

$EI \frac{\partial^2 v(l,t)}{\partial x^2} = 0$ n

b) Seja $V(x) = \alpha x - \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x$

- É derivável n vezes pq tem parte trigonométrica, inclui metade da ordem (4°) do sistema
- Verifica as cond de fronteira geométricas



$V(0) = \alpha \cdot 0 - \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} \cdot 0 = 0$ ✓

c) $V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 v}{dx^2} \right)^2 dx$

$\frac{d^2 v}{dx^2} = \delta \left(\frac{\pi}{l} \right)^2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x$

$V_{max} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \delta \frac{\pi^2}{l^2} \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x \, dx = -EI \delta \frac{\pi}{2l} \cos \frac{\pi}{l} x \Big|_0^l = +EI \delta \frac{\pi}{2l} (-1 - 1) = EI \delta \frac{\pi}{l}$

$T_{max} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho A \left(\alpha x - \delta \operatorname{sen} \frac{\pi}{l} x \right) dx$

$= \frac{1}{2} \omega^2 \rho A \left(\alpha \frac{l^2}{2} + \delta \frac{l}{\pi} \left(\cos \frac{\pi}{l} l - \cos 0 \right) \right) = \frac{1}{2} \omega^2 \rho A \left(\alpha \frac{l^2}{2} - 2 \delta \frac{l}{\pi} \right)$

$\frac{1}{2} \omega^2 \rho A \left(\alpha \frac{l^2}{2} - 2 \frac{l}{\pi} \delta \right) = \frac{2EI}{\rho A} \delta \frac{\pi}{l}$

$\omega = \sqrt{\frac{2EI\delta\pi}{\rho A l} \cdot \frac{2\pi}{\alpha l^2 \pi - 4 l \delta}} = \sqrt{\frac{4\pi^2 EI \delta}{\rho A l^2} \frac{1}{\alpha l \pi - 4\delta}}$

c) Base Modal $\quad m = 1\ kg\ ;\ k = 25600\ N/m$

$$|\phi|_i = \frac{1}{\sqrt{|u|_i^T [m] |u|}} |u|_i$$

$$|\phi|_1 = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix}1 & 1\end{vmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}}} \begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix} = 0{,}577 \begin{vmatrix}1\\1\end{vmatrix}$$

$$|\phi|_2 = \frac{1}{\sqrt{\begin{vmatrix}-2 & 1\end{vmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}\begin{vmatrix}-2\\1\end{vmatrix}}} \begin{vmatrix}-2\\1\end{vmatrix} = 0{,}408 \begin{vmatrix}-2\\1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}-0{,}816\\0{,}408\end{vmatrix}$$

$$\Phi = \begin{bmatrix}0{,}577 & -0{,}816\\ 0{,}577 & 0{,}408\end{bmatrix}$$

$\omega_1^2 = 25600 \Rightarrow \omega_1 = 160\ rad/s$

$\omega_2^2 = 2{,}5\ 25600 \Rightarrow \omega_2 = 253\ rad/s$
$= 64000$

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1\\ \ddot{\eta}_2\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}25600 & 0\\ 0 & 64000\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0{,}577 & 0{,}577\\ -0{,}816 & 0{,}408\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}f(t)\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{cases}\ddot{\eta}_1 + 25600\,\eta_1 = 0{,}577\, f(t)\\ \ddot{\eta}_2 + 64100\,\eta_2 = -0{,}816\, f(t)\end{cases}$$

d) $\Theta(\omega) = ? \rightarrow f(t) = F_0 \cos \omega t\ ;\ \omega = 178\ rad/s$

$$[Z(\omega)]\{X(\omega)\} = \{F\}$$

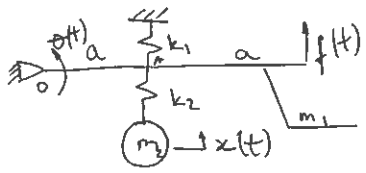
$$[Z] = [[k] - \omega^2 [m]]$$

$$\begin{bmatrix}2\cdot 25600 - 178^2 \cdot 1 & -25600\\ -25600 & 3\cdot 25600 - 2\cdot 1\cdot 178^2\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X(\omega)\\ \Theta(\omega)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}19516 & -25600\\ -25600 & 13432\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}X\\ \Theta\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}F_0\\ 0\end{Bmatrix}$$

$$\Theta = \frac{-Z_{12} F_1}{Z_{11} Z_{22} - Z_{12} Z_{21}} = \frac{25600\, F_0}{19516 \cdot 13432 - 25600^2}$$

2.



$l = 2a$

$x_A \simeq a\theta$ · pq $\operatorname{sen}\theta \approx \theta = \frac{x_A}{a}$

a) Lagrange

$T = \frac{1}{2}m_2\dot{x}^2 + \frac{1}{2}J_0\dot{\theta}^2$; $V = \frac{1}{2}k_1x_A^2 + \frac{1}{2}k_2(x_A - x)^2 = \frac{1}{2}k_1a^2\theta^2 + \frac{1}{2}k_2(a\theta - x)^2$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_x} = m_2\dot{x}$ $\frac{d}{dt} = m_2\ddot{x}$; $\frac{\partial T}{\partial q_x} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial q_x} = -k_2(a\theta - x) = k_2x - ak_2\theta$

$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_\theta} = J_0\dot{\theta}$ $\frac{d}{dt} = J_0\ddot{\theta}$; $\frac{\partial T}{\partial q_\theta} = 0$; $\frac{\partial V}{\partial q_\theta} = k_1a^2\theta + k_2a(a\theta - x) = -ak_2x + a^2(k_1+k_2)\theta$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i}\right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_i$

$$\begin{cases} m_2\ddot{x} + k_2x - ak_2\theta = 0 \\ J_0\ddot{\theta} - ak_2x + a^2(k_1+k_2)\theta = 2af(t) \end{cases}$$

$J_0 = \frac{1}{12}m_1l^2 + m_1\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}\cdot 6m\cdot(2a)^2 + 6m\cdot\left(\frac{l}{2}\right)^2$

$= \frac{m}{2} + \frac{3m}{2} = 2m$

b) $k_1 = 10k$; $k_2 = 2k$; $m_1 = 6m$; $m_2 = m$, $a = \frac{l}{2}m$

$$\begin{cases} m\ddot{x} + 2kx - \frac{1}{2}\cdot 2k\theta = 0 \\ 2m\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\cdot 2kx + \frac{1}{4}(10k+2k)\theta = 2\cdot\frac{1}{2}f(t) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix}\begin{Vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Vmatrix} + \begin{bmatrix} 2k & -k \\ -k & 3k \end{bmatrix}\begin{Vmatrix} x \\ \theta \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} f(t) \\ 0 \end{Vmatrix}$$

$$\det\left([k] - \omega^2[m]\right) = 0 \quad \begin{vmatrix} 2k - \omega^2 m & -k \\ -k & 3k - 2m\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \iff 6k^2 - 4mk\omega^2 - 3mk\omega^2 + 2m^2\omega^4 - k^2 = 0$$

$$\iff 2m^2\omega^4 - 7mk\omega^2 + 5k^2 = 0$$

$$\frac{7mk \pm \sqrt{49(mk)^2 - 4\cdot 2m^2\cdot 5k^2}}{4m^2} = \frac{7mk \pm 3mk}{4m^2} = \frac{k}{m}\frac{7\pm 3}{4} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1^2 = 1\frac{k}{m} \\ \omega_2^2 = 2{,}5\frac{k}{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega_1 = 1\sqrt{\frac{k}{m}} \\ \omega_2 = 1{,}58\sqrt{\frac{k}{m}} \end{cases}$$

Para ω_1

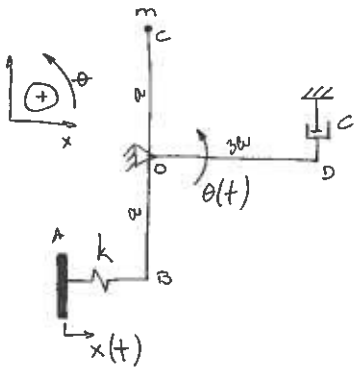
$$\begin{bmatrix} 2k - \frac{k}{m}\cdot m & -k \\ -k & 3k - 2m\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{Vmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{Vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} ku_{11} - ku_{21} = 0 \\ -ku_{11} + ku_{21} = 0 \end{cases} \Rightarrow u_{11} = u_{21} \quad \{u\}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

1° modo $\{x\}_1 = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \end{Vmatrix}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t - \phi_1\right)$

$$\begin{bmatrix} 2k - m\cdot 2{,}5\frac{k}{m} & -k \\ -k & 3k - 2m\cdot 2{,}5\frac{k}{m} \end{bmatrix}\begin{Vmatrix} u_{12} \\ u_{22} \end{Vmatrix} = 0 \quad \begin{cases} -0{,}5k\,u_{12} - ku_{22} = 0 \\ -ku_{12} - 2ku_{22} = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{matrix} u_{12} = -2u_{22} \\ \frac{u_{12}}{u_{22}} = -2 \end{matrix} \quad \{u\}_2 = \begin{Vmatrix} -2 \\ 1 \end{Vmatrix}$$

2° modo $\{x\}_2 = \begin{Vmatrix} 2 \\ -1 \end{Vmatrix}\cos\left(1{,}58\sqrt{\frac{k}{m}}\cdot t - \phi_2\right)$

)·



$\theta(t_1 = 0{,}04262) = 0{,}2063$

$\theta(t_2 = t_1 + 3T = 0{,}1482) = 0{,}0205$

a) $\xi = ?$

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} = \frac{1}{3} \ln \frac{0{,}2063}{0{,}0205} = 0{,}77$$

$$\xi = \frac{\delta}{\sqrt{4\pi^2 + \delta^2}} = \frac{0{,}77}{\sqrt{4\pi^2 + 0{,}77^2}} = 0{,}1216$$

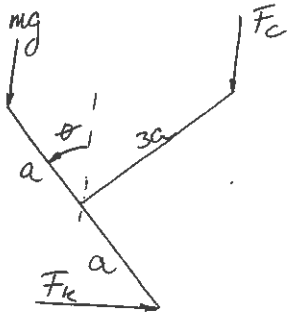
b) $\omega_n = ?$

$$t_2 = t_1 + 3T_d \Leftrightarrow T_d = \frac{t_2 - t_1}{3} = \frac{0{,}1482 - 0{,}04262}{3} = 0{,}0352$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T} = 178{,}5 \text{ rad/s}$$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \xi^2} \Leftrightarrow \omega_n = \frac{178{,}5}{\sqrt{1 - 0{,}1216^2}} = 179{,}83 \text{ rad/s}$$

c) $\Sigma M_0 = \cancel{J_0}^{*} \ddot{\theta} = ma^2\ddot{\theta}$



$F_k = k(x - a\sin\theta)$

$F_c = c \cdot 3a\dot{\theta}\cos\theta$

$^{*}J_0 = J_{0\,barras} + J_{massa}$

$J_{massa} = J^{0}_{massa\ concentrada} + ma^2$

$$mga\sin\theta + F_k a\cos\theta - F_c \cdot 3a\cos\theta = ma^2\ddot{\theta}$$

$$mga\sin\theta + ah(x - a\sin\theta)\cos\theta - 3ac\dot{\theta}\cos\theta \cdot 3a\cos\theta = ma^2\ddot{\theta}$$

$\sin\theta \approx \theta$

$\cos\theta \approx 1$

$$mga\cdot\theta + ahx - a^2h\theta - (3a)^2c\dot{\theta} = ma^2\ddot{\theta}$$

$$ma^2\ddot{\theta} + 9a^2c\dot{\theta} + (a^2h - mga)\theta = ahx$$

d) $a = \frac{1}{2}m$; $k = 5 \cdot 10^4$ N/m → $m = ?$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \omega_n^2 = \frac{ah - mg}{am} \Leftrightarrow \omega_n^2 = \frac{h}{m} - \frac{g}{a} \Leftrightarrow \omega_n^2 + \frac{g}{a} = \frac{h}{m}$$

$$m = \frac{k}{\omega_n^2 + g/a} = \frac{5 \cdot 10^4}{179{,}83 + 9{,}81/\frac{1}{2}} = 250{,}68 \text{ kg}$$

e) $x(t) = X\sin\omega t$; $\omega = 360$ rad/s ; $X_c = 10$ mm

$a\theta = X_c$ $\quad \theta = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20$ mm

$$\theta(\omega) = X(\omega)\frac{\sqrt{1 + (2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \qquad \beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{360}{179{,}83} = 2$$

$$\theta(\omega) = X \cdot \frac{\sqrt{1 + (2 \cdot 0{,}1216 \cdot 2)^2}}{\sqrt{(1-2^2)^2 + (2 \cdot 0{,}1216 \cdot 2)^2}} = X\ 0{,}366$$

$X(\omega) = 20/0{,}366 = 54{,}64$ mm

pg



não aplica

e) $x(t) = X \operatorname{sen} 360t$ $\quad x_c = 10\ mm$

$c = 2 m \omega_n = 0{,}1216 \cdot 2 \cdot 250{,}68 \cdot 179{,}83$

$c = 10963{,}4$

$ma\ddot{\theta} + 9ac\dot{\theta} + (ah - mg)\theta = h x(t) = h X \operatorname{sen} 360t$

$250{,}68 \cdot 0{,}5\ddot{\theta} + 9 \cdot 0{,}5 \cdot 10963{,}4\dot{\theta} + (0{,}5 \cdot 5 \cdot 10^4 - 250{,}68 \cdot 9{,}81)\theta = 5 \cdot 10^4 X \operatorname{sen} \omega t$

$125{,}34\ddot{\theta} + 49335{,}3\dot{\theta} + 22540{,}8\theta = 5 \cdot 10^4 X$

$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{360}{179{,}83} = 2$

$\Theta(\omega) = \frac{F_0}{k} \cdot \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\beta)^2}} = \frac{5 \cdot 10^4 X / 22540{,}8}{\sqrt{(1-2^2)^2 + (2 \cdot 0{,}1216 \cdot 2)^2}} = 0{,}73 X$

$\Theta = \frac{x_c}{oc} = \frac{x_c}{a} = \frac{10 \cdot 10^{-3}}{0{,}5} = 0{,}02$

$X = \frac{0{,}02}{0{,}73} = 0{,}0274\ m = 27{,}4\ mm$

f)

$\Theta = 5 = \frac{5 \cdot 10^4 \cdot 0{,}0274 / 22540{,}8}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \cdot 0{,}1216\beta)^2}}$

$\beta_1^2 =$ $\quad \beta$

$\beta_2^2 =$ $\quad \beta$

$\omega = \beta \omega_n$

$\omega_1 =$

$\omega_2 =$