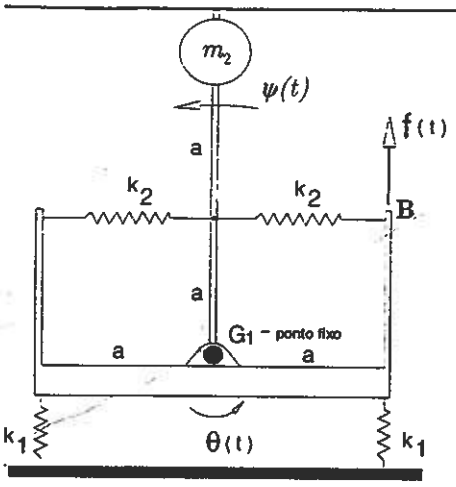



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por:

- Corpo 1 - uma estrutura rígida, de massa $m_1$ e momento de inércia $J_{G_1}$, ligada ao exterior no ponto $\mathbf{G_1}$ por uma articulação e por duas molas lineares elásticas de igual rigidez $k_1$. Sobre esta estrutura actua uma força $f(t)$ no ponto **B**.
- Corpo 2 - uma massa $m_2$, suportada por uma barra rígida de massa e inércia não considerável, ligada ao exterior pela articulação anterior e ligada ao corpo 1 por duas molas lineares de igual rigidez $k_2$.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $\psi(t)$.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Considerando os dados abaixo indicados, determinar:

$$k_1 = 5k \qquad k_2 = 2k \qquad J_{G_1} = 8ma^2 \qquad m_2 = m \qquad a = 0.5\text{m}$$

b) (15%) as frequências e formas naturais de vibração do sistema. Esboçar e comentar as formas naturais de vibração;

c) (15%) as equações do movimento do sistema na base modal;

Tomando para valores de $k$ e $m$ os abaixo indicados, determinar:

$$k = 20000\ \text{N/m} \qquad m = 0.5\ \text{kg}$$

d)(10%) o valor máximo da resposta $\theta(t)$ quando $f(t) = F\,\delta(t)$ (solicitação impulso de valor $F$ aplicada no instante inicial).

e)(10%) a amplitude $\Psi(\omega)$ da resposta $\psi(t)$ da barra quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 25\,\text{rad/s}$.

f)(20%) Tendo em conta a solicitação da alínea anterior, alterar a distância entre a massa concentrada $m_2$ e o ponto $\mathbf{G_1}$ de forma a que a amplitude $\Psi(\omega)$ da sua resposta seja reduzida de 5%.

3) (4 val.) Na figura representa-se um modelo simplificado das asas e da fuselagem de uma aeronave. As asas são modelizadas por duas vigas de comprimento $\ell$ ligadas rigidamente entre si por uma massa concentrada $m$ que representa a fuselagem. As vigas têm uma secção recta de área $A$ e momento de 2ª ordem $I$, e o material possui módulo de elasticidade $E$ e massa volúmica $\rho$. O modelo considerado está livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação) com energia elástica nula e frequência também nula.

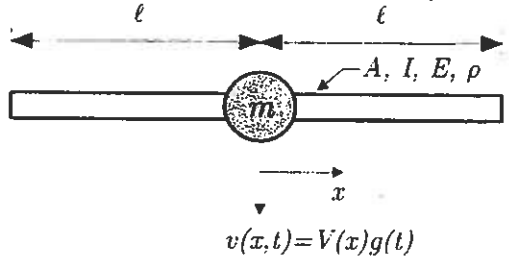
a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (15%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \dfrac{1}{3} - \dfrac{x^2}{\ell^2}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

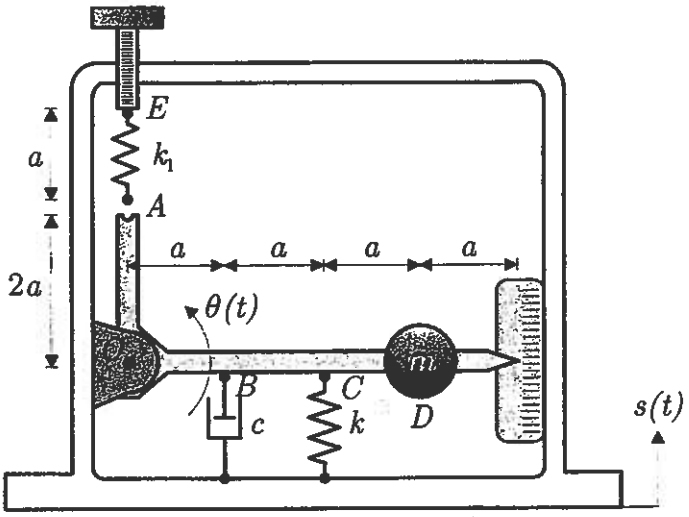
c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\varepsilon = \dfrac{m}{2\rho A\ell}$.

d) (20%) Indicar os valores exactos da frequência natural para os casos limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$.

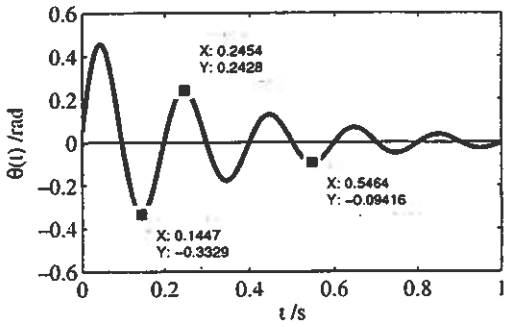
e) (20%) Discutir a validade da solução fornecida pelo quociente de Rayleigh para os valores limite: $m \to 0$ e $m \to \infty$. Se necessário, propor uma solução alternativa para a função de aproximação $V(x)$.



1) (4 val.) A figura representa um transdutor de vibrações constituído por uma barra rígida em forma de **L**, articulada no ponto **O**, com uma massa concentrada $m = 1$ kg no ponto **D**, ligada a um amortecedor de constante $c$ ponto **B** e a uma mola linear elástica de constante $k$ no ponto **C**. No ponto **A** pode ser ligada uma mola linear elástica de constante $k_1$ e comprimento livre $a$, sendo o seu comprimento efectivo ajustável através de um parafuso.




Antes de utilização, o mecanismo do transdutor foi sujeito a um teste em regime livre, tendo sido registada a resposta $\theta(t)$ representada no gráfico. Determinar,




a) (10%) a razão de amortecimento $\xi$;

b) (10%) a frequência angular natural não amortecida $\omega_n$.

Considerando a mola **AE** livre (não actuante), assumindo a hipótese de pequenas oscilações e considerando desprezável a inércia da barra, estabelecer:

c) (25%) a equação diferencial (linearizada) do movimento.

d) (10%)Determinar a constante de amortecimento $c$ e a constante de rigidez $k$;

Para ensaiar o transdutor, aplicou-se um deslocamento harmónico $s(t) = S \sin \omega t$ com uma amplitude $S = 5$ mm e uma frequência $\omega = 3$ Hz.

e) (15%) determinar a amplitude $S_l$ lida na régua do transdutor e o respectivo erro $\epsilon$.

Para corrigir o valor lido, ajustou-se o parafuso da mola **AE** de modo a comprimir a mola para dois terços do seu comprimento livre (elongação $\delta = \frac{1}{3}a$).

f) (10%)Reescrever a equação diferencial do movimento;

Para uma rigidez $k_1 = 4k$,

g) (10%)Calcular a nova frequência natural e o novo valor lido na régua.

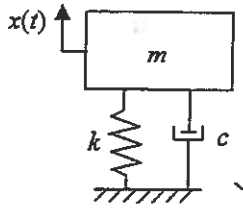


Figura 1

1 - A equação de movimento do sistema representado na Figura 1 é $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=0$.

a) Estabeleça a equação característica e obtenha as suas raízes em função de *m*, *c* e *k*. (1 valor)

b) Quando a razão de amortecimento ξ é menor do que 1, que forma têm as raízes da equação característica? Represente graficamente o movimento do sistema para este caso. (1)

2 - Considere um sistema com um grau de liberdade actuado por uma força harmónica. Neste caso, a equação diferencial do movimento é da forma $m\ddot{x}(t)+c\dot{x}(t)+kx(t)=F\cos(\omega t)$, com *m*, *c*, *k* e *F* constantes.

a) A resposta permanente pode-se escrever como $x_p(t)=B_1\cos(\omega t)+B_2\sin(\omega t)$. Partindo desta expressão, deduza as expressões que relacionam a amplitude $X(\omega)$ e o ângulo de fase $\phi(\omega)$ da resposta permanente com *m*, *c*, *k*, *F* e ω.(1.5)

b) O factor de amplificação dinâmica $\mu(\omega)$ é dado por $\mu(\omega)=X(\omega)/X_S$, em que $X_S$ representa o deslocamento estático. Represente graficamente o factor de amplificação dinâmica em função da razão de frequências $\omega/\omega_n$, para três casos típicos: razão de amortecimento muito pequena ($\xi<0.1$), média ($0.3<\xi<0.5$) e elevada $\xi>1$. (0.75)

3 – Sistemas com *n* graus de liberdade

a) Sugira uma transformação de coordenadas para desacoplar as equações do movimento de um sistema discreto com *n* graus de liberdade, não amortecido e sob a acção de forças exteriores. (0.75)

b) Escreva as equações do movimento desacopladas, explicitando a forma das matrizes e vector(es). (0.75)

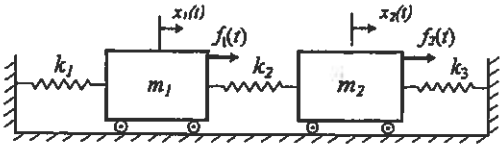


Figura 2

c) Suponha que as forças aplicadas ao sistema representado na Figura 2 são $f_1(t)=F_1\cos(\omega t)$ e $f_2=0$ e que ω varia. Quais são as amplitudes máximas do movimento das massas do sistema (sistema idealizado) e qual é a amplitude mínima, em módulo, de vibração da massa 1? (0.75)

4 – Deduza a equação diferencial parcial do movimento transversal, $v(x,t)$, de uma corda de secção transversal com área *A*, com módulo de elasticidade *E* e massa volúmica ρ (*A*, *E* e ρ constantes), sujeita a uma força por unidade de comprimento $f(x,t)$, segundo *z* (Figura 3). (1.5)

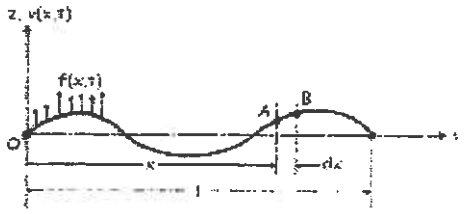


Figura 3

**Relações trigonométricas**: $\cos(a+b)=\cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$; $\cos(a-b)=\cos(a)\cos(b)+\sin(a)\sin(b)$; $\sin(a+b)=\sin(a)\cos(b)+\cos(a)\sin(b)$, $\sin(a-b)=\sin(a)\cos(b)-\cos(a)\sin(b)$.