1) (2 val) A vibração mecânica pode definir-se como um movimento alternado em torno de uma posição de referência.

a) (25%) Indicar quais os elementos constituintes de um sistema vibratório;
b) (25%) Explicar, do ponto de vista energético, o fenómeno da vibração;
c) (25%) Definir frequência natural de vibração;
d) (25%) Definir frequência de ressonância de amplitude.

2) (2 val) O isolamento de vibrações consiste em reduzir a grandeza de forças transmitidas por equipamentos para as suas fundações ou em reduzir o movimento de apoios móveis para os equipamentos.

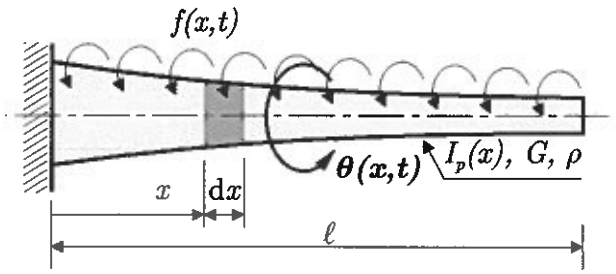
a) (25%) Definir transmissibilidade absoluta e relativa. Representar graficamente e lado a lado a TR_{abs} e a TR_{rel}, indicando eventuais pontos notáveis.
b) (25%) Discutir a eficiência do isolamento em termos da massa do equipamento e da rigidez da suspensão;
c) (25%) Justificar a razão pela qual, em geral, não se considera o amortecimento no dimensionamento de uma suspensão elástica para isolamento de vibrações;
d) (25%) Para uma excitação multi frequência, indicar, justificando, qual a frequência a considerar no dimensionamento da suspensão elástica.

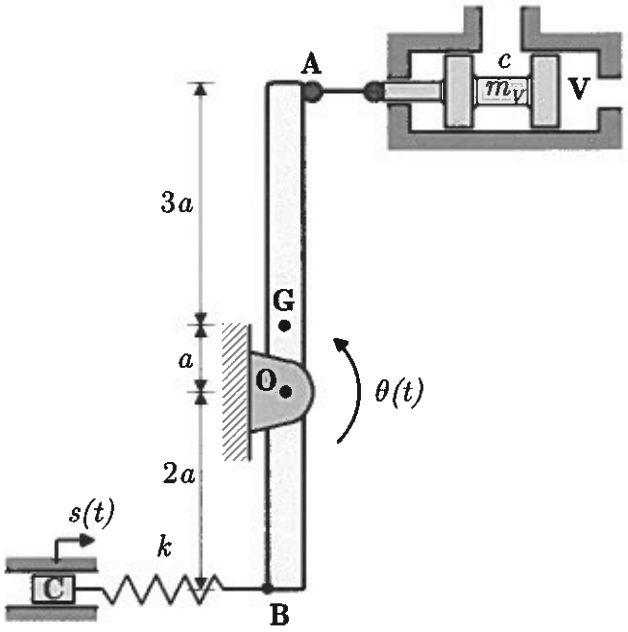
3) (2 val) O comportamento vibratório de um sistema amortecido com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\}+[c]\{\dot{x}(t)\}+[k]\{x(t)\}=\{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x(t=0)\}$ e $\{\dot{x}(t=0)\}$.

a) (25%) Caracterizar as matrizes de massa e de rigidez;
b) (25%) Caracterizar as equações de movimento na base modal ou natural;
c) (25%) Mostrar como a resposta $\{x(t)\}$ do sistema é dada pela combinação linear (sobreposição) dos modos naturais de vibração;
d) (25%) Com base nas frequências naturais ω_1 e ω_2 e nos amortecimentos modais ξ_1 e ξ_2 de um sistema com 2 graus de liberdade, estabelecer duas equações que permitam determinar os parâmetros α e β de uma matriz de amortecimento proporcional, $[c]=\alpha[m]+\beta[k]$. Referir o interesse de uma matriz de amortecimento proporcional.

4) (2 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção descrita pelo campo de deslocamento angular $\theta(x,t)$ que se pode exprimir na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$.

a) (40%) Considerar um elemento infinitesimal de veio e, por aplicação da 2ª lei de Newton, estabelecer a equação de equilíbrio dinâmico;
b) (30%) Explicar o significado físico da solução $\theta(x,t)$ expressa na forma $\theta(x,t)=\Theta(x)g(t)$;
c) (30%) Escrever as expressões que traduzem as propriedades de ortogonalidade (ortonormalidade) das funções características $\Theta_r(x)$ $r=1,\ldots,\infty$ representativas das formas naturais de vibração.





1) (4 val.) O mecanismo representado na figura acciona uma válvula V de massa m_V. Admite-se que a viscosidade do fluído hidráulico se traduz num coeficiente de amortecimento c. A barra **AOB** está articulada com a válvula no ponto **A**; o seu momento de inércia relativamente a um eixo que passa pelo centro de gravidade é $I_G = \frac{1}{12} m_b \ell^2$, onde m_b representa a massa e ℓ ($\ell = 6a$) o comprimento da barra. Uma das extremidades de uma mola linear elástica está ligada à barra no ponto **B** e a outra extremidade (ponto **C**) está submetida a um deslocamento $s(t)$ na horizontal. As oscilações angulares da barra são pequenas. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m a mola não está deformada.

a) (30%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Admitindo que a equação de movimento é

$$0.12346\,\ddot{\theta}(t) + 0.144\,\dot{\theta}(t) + 10\,\theta(t) = 125\,s(t),$$

determinar:

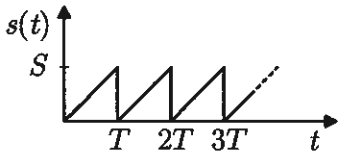
b) (10%) a frequência natural não amortecida ω_n;

c) (10%) a razão de amortecimento ξ;

d) (20%) a amplitude do movimento da válvula, quando $s(t) = 2\times10^{-3}\cos(13.5\ t)$ [m];

e) (15%) a amplitude da força transmitida à válvula, quando $s(t) = 2\times10^{-3}\cos(13.5\ t)$ [m].

f) (15%) Admitindo que o deslocamento $s(t)$ tem a forma representada na figura seguinte, com $T = 2.1244$ s, obter uma estimativa para o deslocamento angular da barra (pretende-se uma expressão em que apenas **um** termo é função do tempo).



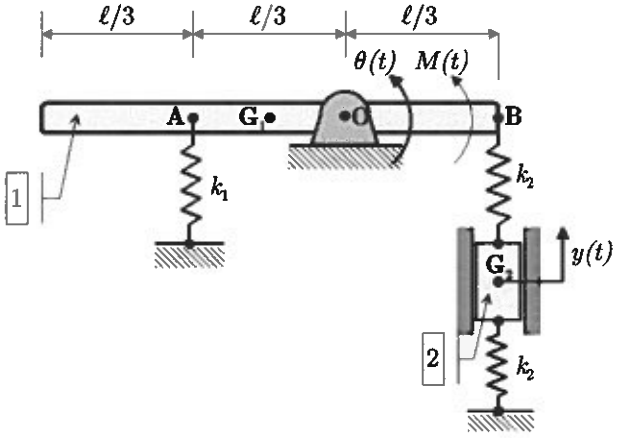
Nota:

$$\int x\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a}$$

$$\int x\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$$

$$\int x^2\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(-a^2x^2\cos(ax) + 2\cos(ax) + 2ax\sin(ax)\right)$$

$$\int x^2\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(a^2x^2\sin(ax) - 2\sin(ax) + 2ax\cos(ax)\right)$$



2) (4 val.) O mecanismo representa-do na figura é constituído por dois corpos. O corpo 1 é uma barra de comprimento ℓ, que roda em torno do ponto fixo **O**, sob a acção do momento motor $M(t)$; os pontos **A** e **B** da barra estão ligados a molas lineares. O corpo 2 é uma massa que se encontra ligada a uma mola em cada extremidade. Na situação de equilíbrio estático, $\theta = 0$ e $y = 0$. A dissipação de energia no sistema é desprezável.

a) (30%) Estabelecer as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 400 & -1200 \\ -1200 & 12000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M(t) \\ 0 \end{Bmatrix}.$$

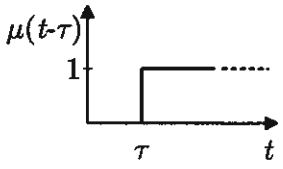
b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

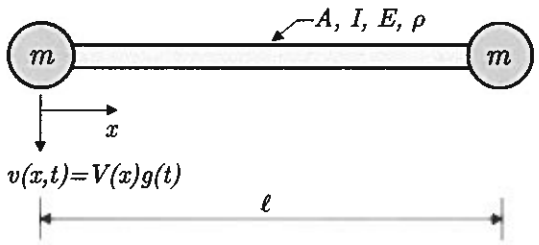
c) (15%) Escrever as equações de movimento na base modal.

d) (20%) Calcular a expressão da amplitude $\Theta(\omega)$ de rotação da barra em função da frequência de excitação, quando $M(t) = M_0 \cos(\omega t)$ e considerando apenas o regime estacionário. Esboçar graficamente a variação da amplitude de $y(t)$ em função da frequência, assinalando eventuais pontos notáveis.

e) (20%) Determinar o limite superior da resposta $\theta(t)$ à solicitação do tipo,

$$\begin{cases} M(t) = M_0 \cos(\omega t), & t \le \tau \\ M(t) = M_0 \cos(\omega t) + \mu(t-\tau) M_1, & t > \tau \end{cases}$$, onde M_0 e M_1 são constantes e $\mu(t-\tau)$ é a função degrau unitário aplicado no instante $t = \tau$.





3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I possui em cada uma das suas extremidades uma massa concentrada m. O material da viga apresenta módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ. A viga encontra-se livre-livre e possui um modo de corpo rígido (translação e/ou rotação) com energia elástica nula e frequência nula.

a) (20%) Escrever e classificar as condições de fronteira da viga.

b) (20%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $V(x) = \frac{2}{\pi} - \sin\left(\frac{\pi}{\ell} x\right)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração (com energia elástica não nula) no método da energia de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $V(x)$.

c) (30%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração utilizando o quociente de Rayleigh. Exprimir o resultado em função de $\varepsilon = \frac{m}{\rho A \ell}$. Esboçar graficamente a variação da frequência em função de ε.

d) (30%) Indicar o valor exacto da frequência natural quando $m \to 0$. Comparar com o resultado aproximado obtido na alínea anterior e comentar.

Parte Teórica – Exame 1ª Chamada de 2008-06-11

1) a) Um sistema vibratório é constituído, em geral, por um elemento capaz de armazenar energia cinética (massa ou inércia), um elemento capaz de armazenar energia potencial (elemento elástico) e um elemento dissipador de energia (amortecedor)

b) O fenómeno da vibração do ponto de vista energético não é mais que a interconversão de energia cinética em energia potencial com a consequente dissipação de energia. Do referia que o sistema tem de estar a descrever um movimento oscilatório.

c) A frequência natural de vibração é a frequência própria de um sistema não amortecido quando este se encontra a vibrar sem a acção de forças exteriores (a perturbação inicial da resposta livre ou natural é um deslocamento ou uma velocidade). Define-se como sendo: $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

É uma propriedade intrínseca do sistema.

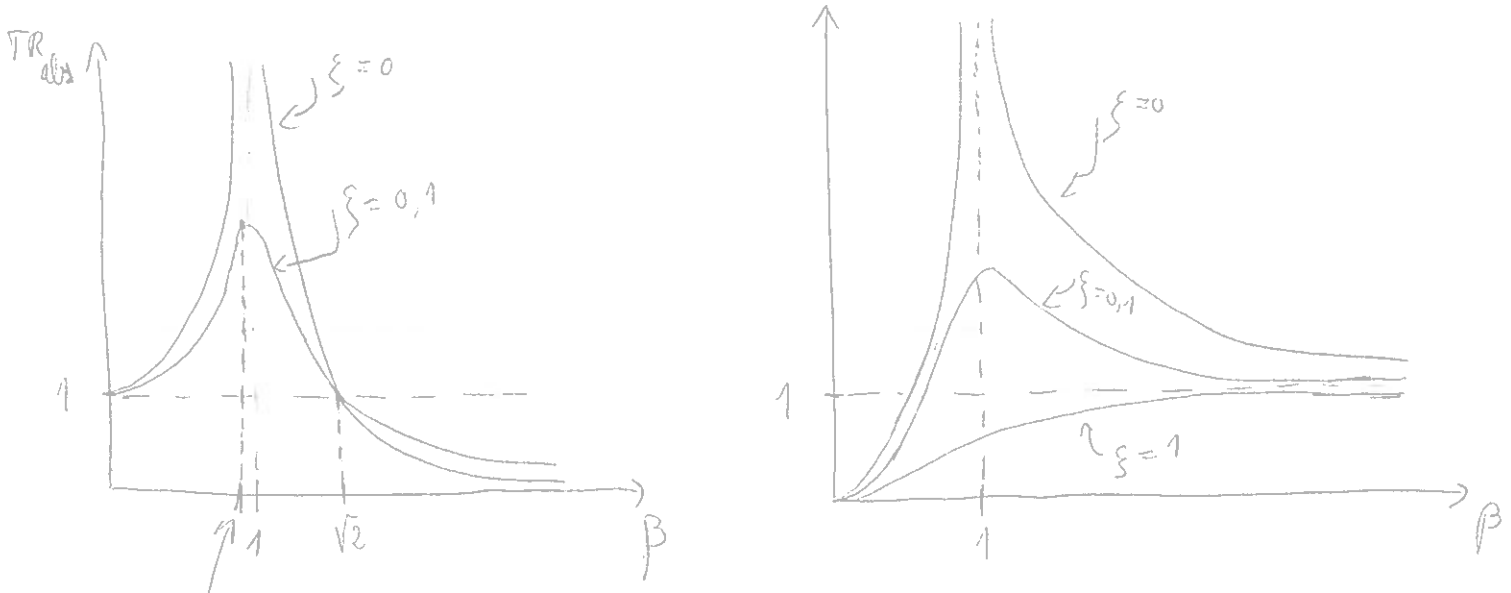
d) A frequência de ressonância de amplitude é a frequência de excitação que provoca a máxima amplitude (de deslocamento, por omissão) do sistema. Define-se para um regime harmónico como sendo: $\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\xi^2}$

2) Transmissibilidade absoluta é definido como sendo a razão entre a amplitude do deslocamento transmitido à massa (ou inércia) pelo movimento oscilatório da base e a amplitude deste último deslocamento: $TR_{abs} = \frac{X(\omega)}{Y} =$

$$= \frac{\frac{1}{k}\sqrt{k^2 + (\omega c)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1+(2\xi\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$

A Transmissibilidade relativa define-se como sendo a razão entre a amplitude do deslocamento relativo da massa (ou inércia) em relação à base e a amplitude do deslocamento da base:

$$TR_{rel} = \frac{Z(w)}{Y} = \frac{\beta}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$$



$$\frac{\partial (TR(\beta;\xi))}{\partial \beta} = 0 \rightarrow \beta_{max} = \dots$$

b) Como vemos através do gráfico TR_{abs}, para $\beta > \sqrt{2}$ há isolamento da vibração sendo este tanto melhor quanto maiores os β. $\frac{w}{w_n} > \sqrt{2} \Rightarrow w_n < \frac{w}{\sqrt{2}}$. Como $w_n = \sqrt{\frac{K}{m}}$ e como normalmente a massa dos apoios é menor que a do sistema, temos de olhar apoios isoladores com uma rigidez muito baixa. Idealmente, quanto maior a massa da suspensão e menor a sua rigidez mais isolante é a mesma.

c) Em geral não se discute o amortecimento porque, como vemos no gráfico, a partir de $\beta = \sqrt{2}$ (i.e. principalmente para $\beta > 3$) a sua influência é pequena na amplitude do deslocamento da massa em relação à base. De referir no

entanto que o aumento do amortecimento conduz a um pior isolamento ($\beta > \sqrt{2}$) mas é sempre necessário que ele exista devido às fases de arranque e de paragem.

d) Para uma solicitação multi frequência tem de se considerar a frequência de excitação mais baixa uma vez que é para esta que a transmissibilidade é maior (considerando que β é sempre superior a $\sqrt{2}$), como podemos ver no gráfico de TR_{abs}. Para frequências muito baixas a rigidez teria de ser demasiado baixa provocando deflexões estáticas muito grandes. Nestes casos usam-se amortecedores de grande massa.

3) Não Sei

4) Não sei

Parte Prática

1) Feito anteriormente //

2); 3); Não sei

