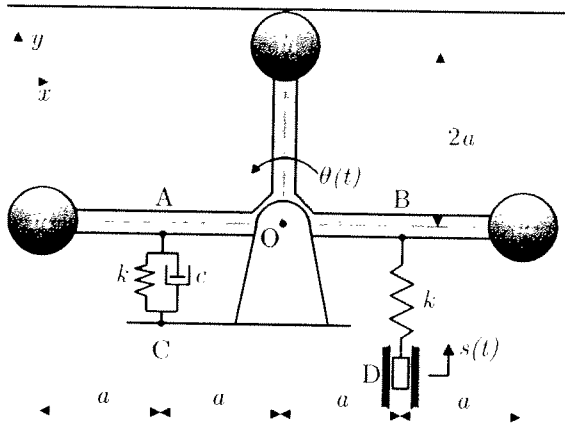


1) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma barra rígida em forma de T articulada no ponto **O** e com uma massa concentrada m em cada uma das extremidades. A massa da barra é desprezável em face das massas concentradas. No ponto **A**, estão ligadas à barra uma mola de rigidez k e um amortecedor de constante de amortecimento c. No ponto **B**, está ligada à barra uma mola de rigidez k. A outra extremidade desta última mola está submetida a um deslocamento $s(t)$ na vertical. As oscilações angulares da barra são pequenas. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, as molas não estão deformadas. Se, com $s(t) = 0$, for aplicada ao sistema uma perturbação inicial tal que $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 \neq 0$ rad/s, o sistema responde conforme se representa na figura abaixo.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Para resolver as alíneas seguintes, admitir que a equação de movimento é,
$0.015\ddot{\theta}(t) + 0.0025c\dot{\theta}(t) + (0.005k - 0.4905)\theta(t) = 0.05ks(t)$.

Determinar,

b) (10%) a razão de amortecimento ξ;

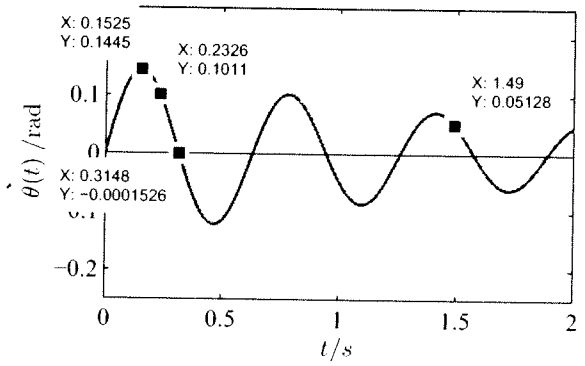
c) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

d) (10%) a constante de rigidez k das molas;

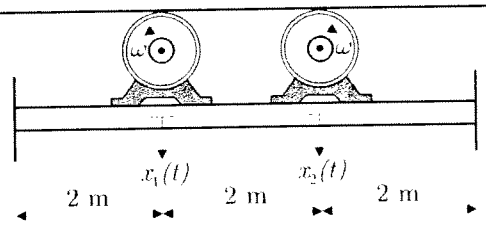
e) (10%) a constante de amortecimento c;

f) (15%) a energia dissipada pelo amortecedor quando, após aplicação da perturbação inicial descrita acima, o sistema regressa ao estado de repouso.

g) (20%) Para $a = 0.05$ m e $s(t) = 5 \times 10^{-3}\cos(\omega t)$ m, considerando apenas o regime estacionário, determinar a(s) frequência(s) de excitação de modo que a amplitude do deslocamento de cada uma das massas seja igual a 0.01 m e que o ângulo de fase entre o deslocamento $s(t)$ e a rotação $\theta(t)$ seja superior a $\pi / 2$.



Resposta livre ou natural



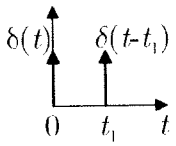
2) (4 val.) Uma máquina de 350 kg é montada a 2 m do apoio esquerdo de uma viga bi-encastrada com 6 m de comprimento, enquanto que uma máquina de 450 kg é colocada a 2 m do apoio direito. Em funcionamento, as máquinas exercem na viga forças $f_1(t)$ e $f_2(t)$, segundo $x_1(t)$ e $x_2(t)$ respectivamente.

a) (20%) Estabelecer a matriz dos coeficientes de flexibilidade.
b) (10%) Calcular a matriz de rigidez.
c) (10%) Escrever as equações do movimento.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

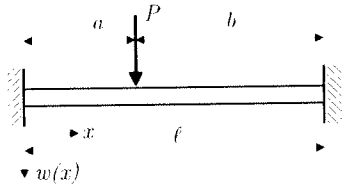
$$\begin{bmatrix} 500 & 0 \\ 0 & 375 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.1128\times10^7 & -0.77550\times10^6 \\ -0.77550\times10^6 & 0.1128\times10^7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

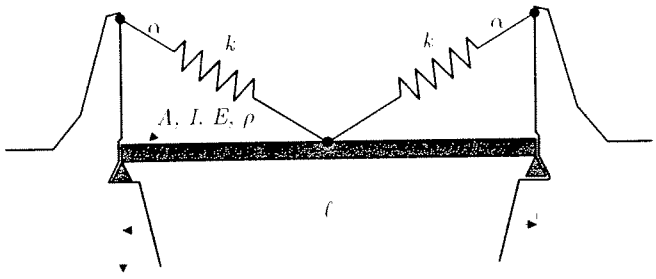
d) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.
e) (10%) Escrever as equações do movimento na base modal.
f) (30%) Considerar que o sistema, em repouso, é submetido a duas forças impulsivas $f_1(t) = F_1\delta(t)$ e $f_2(t) = F_2\delta(t-t_1)$, sendo a primeira aplicada segundo $x_1(t)$ no instante $t = 0$ e a segunda segundo $x_2(t)$ no instante t_1 ($t_1 > 0$). Determinar o deslocamento $x_1(t)$ para $t > t_1$.



NOTA: A deflexão $w(x)$ da viga devida a uma carga estática P é dada pela expressão:

$$w(x) = \begin{cases} \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2\right] & 0 \le x \le a \\ \dfrac{Pb^2}{6EI\ell^3}\left[(2b-3\ell)x^3 + 3\ell(\ell-b)x^2 + \dfrac{\ell^3}{b^2}(x-a)^3\right] & a \le x \le \ell \end{cases}$$





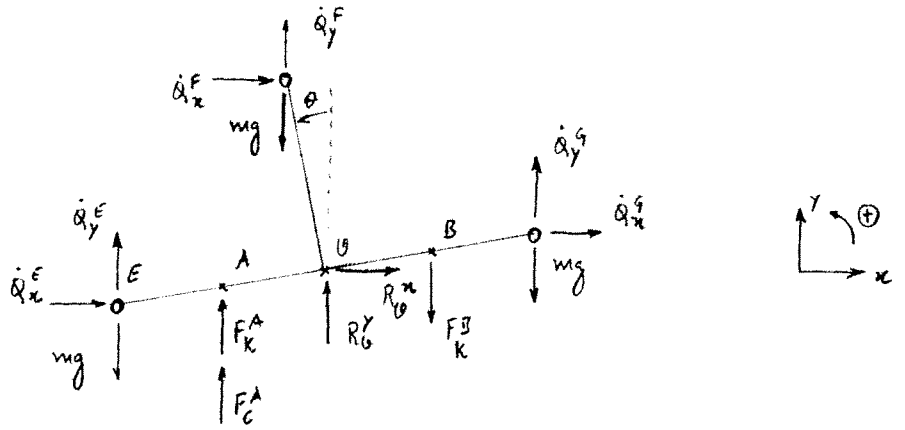
3) (4 val.) Uma viga de comprimento ℓ, de secção recta de área A e momento de 2ª ordem I, de material com módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ, está simplesmente apoiada e é suportada a meio vão por duas molas lineares elásticas de rigidez k conforme se representa na figura. As funções $V(x) = \delta \sin\dfrac{2\pi}{\ell}x$ e $V(x) = \delta \sin\dfrac{\pi}{\ell}x$ são funções admissíveis para o sistema podendo ser usadas com o método da energia de Rayleigh.

a) (20%) Esboçar graficamente e seleccionar, justificando, dentre as funções propostas, a mais adequada para estimar a frequência natural fundamental;
b) (10%) Calcular a energia cinética máxima, T_{max};
c) (20%) Calcular a energia elástica máxima, V_{max};
d) (10%) Calcular a estimativa da frequência natural de vibração. Exprimir o resultado em função de $k = \varepsilon EI / \ell^3$.
e) (20%) Discutir a validade da solução obtida na alínea anterior para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.
f) (20%) Determinar a frequência fundamental exacta para os casos limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.

Exame de Recurso de 2008-07-11 — Estudo para fim do curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

a) Quando perturba-se o sistema, temos:



No ponto A:

$$\vec{\vartheta_A} = \begin{Bmatrix} -a\cos\theta \\ -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{\vartheta_A} = \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v_A} = \dot{\vec{\vartheta_A}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_C^A} = -c \times \vec{v_A} = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_K^A} = -K \times \Delta\vec{\vartheta_A} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ Ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B:

$$\vec{\vartheta_B} = \begin{Bmatrix} a\cos\theta \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{\vartheta_B} = \begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_K^B} = -K \times \Delta\vec{\vartheta_B} = -K \left[\begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \right.$$

No ponto E:

$$\vec{v}_E = \begin{Bmatrix} -2a\cos\theta \\ -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_E = \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_E = \dot{\vec{v}}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_E = \dot{\vec{v}}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}_E = m \times \vec{a}_E = m \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2ma\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto F:

$$\vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_F = \dot{\vec{v}}_F = \begin{Bmatrix} -2a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_F = \dot{\vec{v}}_F = \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}_F = m \times \vec{a}_F = m \times \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2ma\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto G:

$$\vec{v}_G = \begin{Bmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_G = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_G = \dot{\vec{v}}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}_G = m \times \vec{a}_G = m \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K}_{O_{Total}} = \vec{K}_{O_E} + \vec{K}_{O_F} + \vec{K}_{O_G}$$

$$\vec{K}_{O_E} = \cancel{\vec{K}_E} + \vec{OE} \times \vec{Q}_E = \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$= 0$, porque é uma massa concentrada

$$\vec{K}_{O_F} = \cancel{\vec{K}_F} + \vec{OF} \times \vec{Q}_F = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$= 0$, porque é uma massa concentrada

$$\vec{K}_{O_G} = \cancel{\vec{K}_G} + \vec{OG} \times \vec{Q}_G = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$= 0$, porque é uma massa concentrada

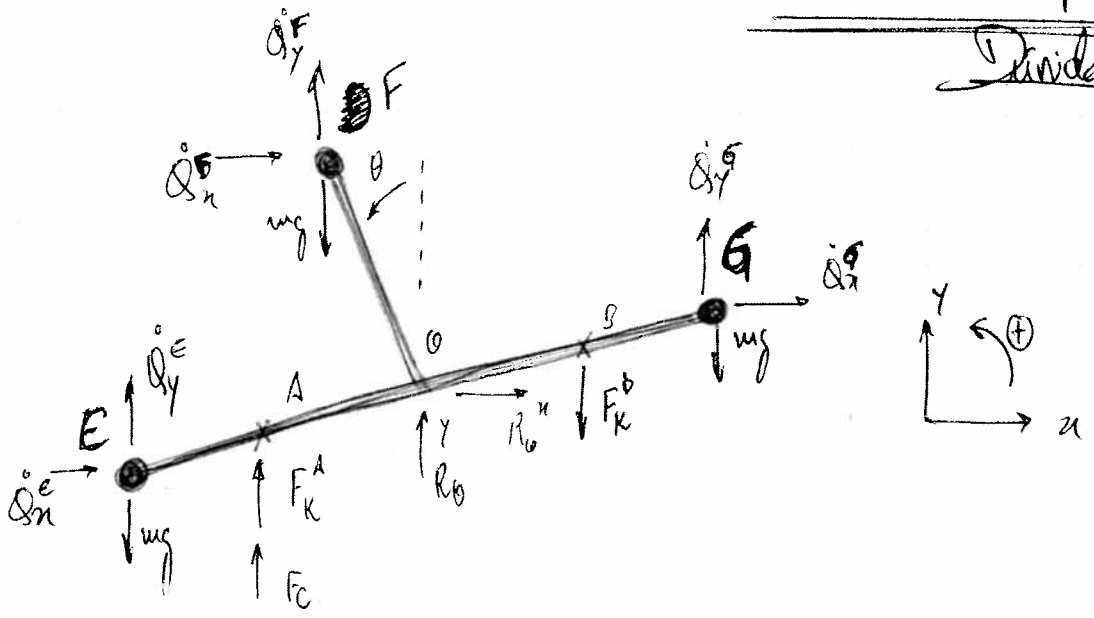
$$\vec{K}_{O_{Total}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento:

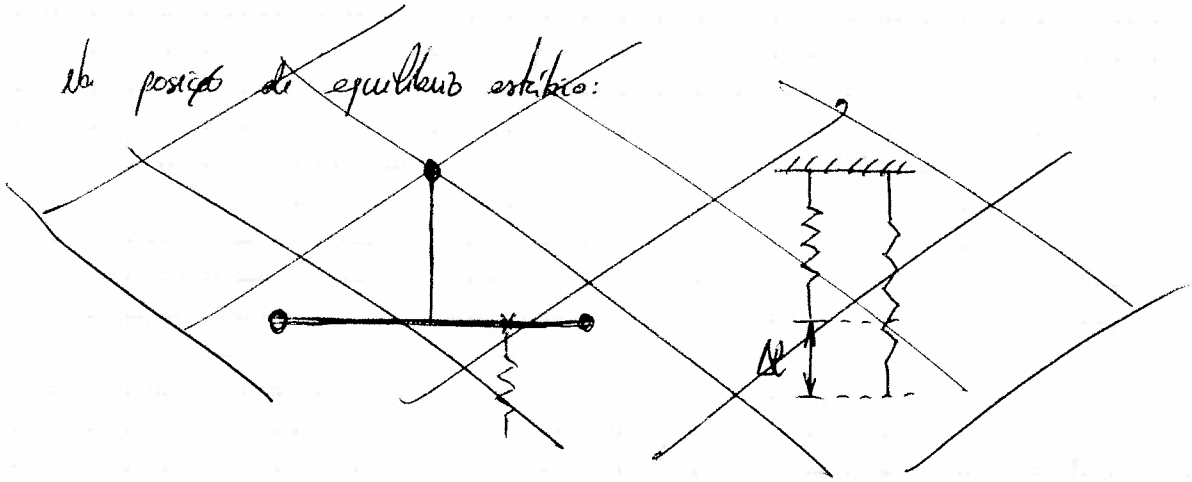
$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O \quad (=)$$

$$(=) \quad \vec{OA} \times \left(\vec{F}_K^A + \vec{F}_c^A \right)$$

Dinâmica



Na posição de equilíbrio estático:



No ponto A:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\cos\theta \\ -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando} : \quad \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v_A} = \dot{\vec{OA}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_C^A} = -c \times \vec{v_A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_K^A} = -K \times \Delta\vec{OA} = -k \times \left[\begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = -k \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B:

$$\vec{OB} = \begin{Bmatrix} a\cos\theta \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_K^B = -k\left[\begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} a \\ s \\ 0 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(a\theta - s) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto C:

$$\vec{OE} = \begin{Bmatrix} -2a\cos\theta \\ -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\vec{Q}}^E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^E = \vec{K}_E + \vec{OE} \times \dot{\vec{Q}}^E = \quad (\vec{K}_E = 0,\ \text{pk massa concentrada})$$

$$= \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

No ponto G ≠ H → resultado

$$\dot{\vec{Q}}^G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{OG} = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{v}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{a}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^G = \vec{K}_G^{\,0} + \vec{OG} \times \dot{\vec{Q}}^G = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4am\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

No ponto F:

$$\vec{OF} = \begin{Bmatrix} -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \vec{OF} = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -2a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \quad \vec{a}_F = \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\dot{\vec{Q}}_F = \begin{Bmatrix} -2ma\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^F = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} -2ma\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4ma^2\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_{O__} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ __ \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento:

$$\sum \vec{M}_O = \vec{K}_O \rightarrow \vec{OA} \times \{F_K^A + F_C^A\}$$

$$\vec{OA} \times \vec{F}_K^A + \vec{OA} \times \vec{F}_C^A + \vec{OB} \times \vec{F}_K^B + \vec{OE} \times m\vec{g} + \vec{OF} \times m\vec{g} + \vec{OG} \times m\vec{g} = \vec{K}_O \therefore$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} 2a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(a\theta - s) \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 12a^2 m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -a(ka\theta + ca\dot{\theta}) - ak(a\theta - s) + 2amg + 2amg = 12a^2 m\ddot{\theta}$$

$$\Leftrightarrow -ka^2\theta - ca^2\dot{\theta} - ka^2\theta + aks + 2a\theta mg = 12a^2 m\ddot{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 m\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + k(2a^2\theta - as(t)) + 2a\theta mg = 0$$

$$\Leftrightarrow 12a^2 m\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + \theta[2ka^2 - 2amg] = aks(t)$$

Eq. movimento:

$$0.015\,\ddot{\theta}(t) + 0{,}0025\,c\,\dot{\theta}(t) + (0{,}005k - 0{,}4905)\,\theta(t) = 0{,}05k\,s(t)$$

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2m_{eq}\omega_n}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} = \sqrt{\quad}$$

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \frac{0{,}1011}{0{,}05126} = 0{,}3394 \qquad \zeta = \frac{0{,}3394}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0{,}3394^2}} = 0{,}05394$$

$T_d = 0{,}3148 \times 2 =$

$=$

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}$$

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} = \frac{2\pi}{\left(1{,}49 - \frac{0{,}2326}{2}\right)} = 9{,}9939$$

$$9{,}9939 = \omega_n \sqrt{1 - 0{,}05394^2} \Rightarrow \boxed{\omega_n = 10{,}0084}$$

$T_d =$

$$T_d = \frac{n_2 - n_1}{N} \Rightarrow n_2 - n_1 = T_d \times N$$

$1{,}9978$

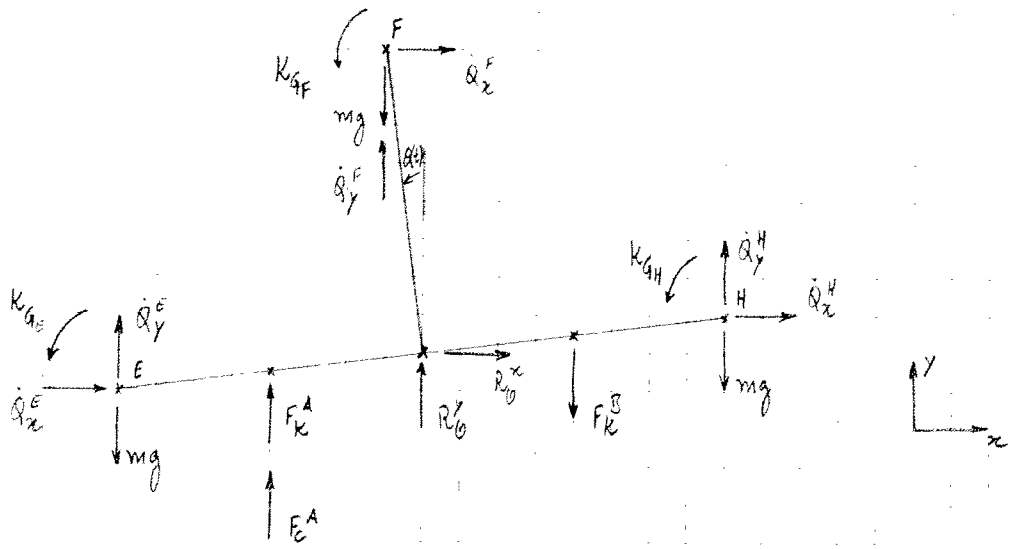
$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Rightarrow 10{,}0084 = \sqrt{\frac{0{,}005K - 9{,}9905}{0{,}015}} \Rightarrow K = 398{,}160 \ N/m$$

$$\xi = \frac{C_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \Rightarrow 0{,}05394 = \frac{0{,}0025C}{2 \times 0{,}015 \times 10{,}0084} = 6{,}4780 \ Ns/m$$

f) $E_c = 0 \ \wedge \ E_p = 0 \Leftarrow$

Exame Recurso de 2008-07-11
Parte Prática
Exercício 1

a) · Diagrama de corpo livre:



· No ponto E, temos:

$$\vec{v}_E = \begin{Bmatrix} -2a\cos\theta \\ -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_E = \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_E = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}^E = m \times \vec{a}_E = m \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^E = \cancel{\vec{K}_{G_E}^E} + \vec{v}_E \times \vec{Q}^E =$$

= 0, porque é uma massa concentrada

$$= \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

· No ponto H, temos:

$$\vec{v}_H = \begin{Bmatrix} 2a\cos\theta \\ 2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \vec{v}_H = \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_H = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad , \quad \vec{a}_H = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}^H = m \times \vec{a}_H = m \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2a\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^H = \cancel{\vec{K}_{G_H}} + \vec{OH} \times \vec{Q}^H =$$

$$= \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 2am\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

· No ponto F, temos:

$$\vec{OF} = \begin{Bmatrix} -2a\,\mathrm{sen}\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \vec{OF} = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -2a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} ; \quad \vec{a}_F = \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}^F = m \times \vec{a}_F = m \times \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{K}_O^F = \cancel{\vec{K}_{G_F}} + \vec{OF} \times \vec{Q}^F =$$

$$= \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

· No ponto A, temos:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\cos\theta \\ -a\,\mathrm{sen}\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_k^A = -k \times \Delta\vec{OA} = -k \times \left[\begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_C^A = -c \times \vec{v}_C = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto E, temos:

$$\vec{OE} = \begin{Bmatrix} a\cos\theta \\ a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \vec{OE} = \begin{Bmatrix} x \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_k^E = -k \times \Delta\vec{OE} = -k \times \left[\begin{Bmatrix} x \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} x \\ -s \\ 0 \end{Bmatrix} \right] =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(a\theta - s) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

· Equação do movimento:

$$\sum \vec{M}_{/O} = \vec{K}_{/O} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times (\vec{F}_k^A + \vec{F}_C^A) + \vec{OB} \times \vec{F}_k^B + \vec{OE} \times m\vec{g} + \vec{OH} \times m\vec{g} + \vec{OF} \times m\vec{g} = \vec{K}_{/O}^{sist.}$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} -a \\ -a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ Ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} a \\ a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -k(a\theta - s(t)) \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} -2a \\ -2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 2a \\ 2a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times m \begin{Bmatrix} 0 \\ -g \\ 0 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \times 4a^2 m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (=)$$

$$(=) \quad -Ka^2\theta - ca^2\dot{\theta} - Ka(a\theta - s(t)) + \cancel{2amg} - \cancel{2amg} + 2a\theta mg =$$

$$= 12a^2 m\ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \quad 12a^2 m\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + Ka^2\theta + Ka^2\theta - 2a\theta mg = Kas(t)$$

Então:

$$12a^2 m\ddot{\theta}(t) + ca^2\dot{\theta}(t) + \left[2Ka^2 - 2amg\right]\theta(t) = Kas(t)$$

b) · Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}}$$

Como não sabemos as constantes c e K, então temos que encontrar outro caminho.

· Decremento logarítmico

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)}$$

· Período natural amortecido:

$T_d = 2 \times 0.3148 = 0,6296$ s ! pelo gráfico do enunciado

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{2\pi}{0.6296} = 9,97965 \text{ rad/s}$$

Da figura, vê-se que os pontos 2 e 4 são homólogos, então reformando:

$$1,49 - 0,2326 = N \times T \quad \therefore \quad 1,49 - 0,2326 = N \times 0,6296 \quad (*)$$

(*) $N = 1,9971$, que é aproximadamente 2.

Voltando ao decremento logarítmico:

$$\delta = \frac{1}{2} \times \ln \left(\frac{0.1011}{0,05128} \right) = 0,339405$$

Então:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0.339405}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0.339405^2}} = 0,05394$$

c) · Frequência angular natural não amortecida:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \therefore \quad \omega_n = \frac{9.97965}{\sqrt{1 - 0,05394^2}} = 9,9942 \text{ rad/s}$$

d) A constante de rigidez K das molas:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow 9,9942 = \sqrt{\frac{0,005\,K - 0,4905}{0,015}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K = 397,7521 \ N/m$$

e) A constante de amortecimento é:

$$\xi = \frac{c_{eq}}{c_c} = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n}$$

$$\therefore 0,05394 = \frac{0,0025 \times c}{2 \times 0,015 \times 9,9942} \Leftrightarrow c = 6,4690 \ Ns/m$$

f) Resposta livre do sistema sub-amortecido:

$$\theta(t) = A\, e^{-\xi \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad , \text{ onde}$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_d}\right)^2 + \theta_0^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_d \ \theta_0}$$

Através do gráfico do enunciado, temos:

$$0,1445 = A \times e^{-0,05394 \times 9,9942 \times 0,1525} \Leftrightarrow A = 0,1569$$

A velocidade de resposta inicial, em $t = 0\,s$, é então:

$$0,1569 = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + 0,05394 \times 9,9942 \times 0}{9,97965}\right)^2 + 0^2} \Leftrightarrow \dot{\theta}_0 = 1,5658 \ rad/s$$

Energia dissipada pelo amortecedor:

No estado de repouso, temos que:

$$E_c = 0 \ J \quad \wedge \quad E_p = 0 \ J$$

Logo após aplicação da perturbação inicial, temos:

$$E_c = \frac{1}{2} \times m_{eq} \times \dot{\theta}_0(i)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times 0{,}015 \times 1{,}5658^2 =$$

$$= 0{,}01839 \text{ J}$$

$$E_p = \frac{1}{2} \times k_{eq} \times \theta_0(i)^2 =$$

$= 0$, pelo enunciado

$$= 0 \text{ J}$$

Então, a energia dissipada é:

$$E_{dissipada} = \Delta E_{mec} = E_{mec_f} - E_{mec_i} =$$

$$= \left(\underbrace{E_{c_f}}_{=0} + \underbrace{E_{p_f}}_{=0}\right) - \left(E_{c_i} + \underbrace{E_{p_i}}_{=0}\right) = -E_{c_i}$$

Conclui-se que o amortecedor dissipa cerca de 0,01839 J.

g) A resposta estacionária é dada por:

$$\theta_p(t) = \Theta_\omega \cos(\omega t - \phi), \text{ onde}$$

$$\Theta(\omega) = \frac{f_{eq}/k_{eq}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

A amplitude tem que ser igual a 0.01 m e $a = 0{,}05$ m, então:



$$2 \times 0{,}05 \times \text{sen}\,\Theta(\omega) = 0.01 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = 0.100167 \text{ rad}$$

O valor de β é obtido através de

$$\theta(w) = \frac{\frac{F_{eq}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 0.100167 = \frac{\frac{0.05 \times 397,7521}{0.005 \times 397,7521 - 0.4905}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \times 0.05394 \times \beta)^2}} \quad (*)$$

(*) $\beta = -1,2837 \quad \vee \quad \beta = -0,5834 \quad \vee \quad \beta = 0,5834 \quad \vee \quad \beta = 1,2837$

Como temos que o ângulo de fase entre o deslocamento $s(t)$ e a rotação $\theta(t)$ tem que ser superior a $\pi/2$, então β tem que ser também superior a 1, logo

$$\beta = 1,2837$$

Então

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\xi\beta}{1-\beta^2}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0.05394 \times 1,2837}{1 - 1,2837^2} = -0.21058 + \pi =$$

$$= 2.9310 > \pi/2$$

∴ A frequência de excitação é portanto:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad 1,2837 = \frac{\omega}{9,9942} \quad (=) \quad \omega = 12,8296 \ rad/s$$

Exame de Recurso de 2008-07-11
Parte Prática (2ª Parte da Matéria)
Exercício 2

Exames Gerais 183 até 192

a) $a_{11} = \omega(x=2)\Big|_{\substack{a=2\\b=4\\p=1\\\ell=6}} = \frac{1 \times 4^2}{6 \times E \times I \times 6^3}\left[(2\times4 - 3\times6)\,2^3 + 3\times6\times(6-4)\,2^2\right] =$

$= \frac{1}{EI} \times 0{,}7901$

$a_{12} = \omega(x=2)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\p=1\\\ell=6}} = \frac{1 \times 2^2}{6 \times E \times I \times 6^3}\left[(2\times2 - 3\times6)\times2^3 + 3\times6\times(6-2)\,2^2\right] =$

$= \frac{1}{EI} \times 0{,}5432$

$a_{21} = a_{12}$

$a_{22} = \omega(x=4)\Big|_{\substack{a=4\\b=2\\p=1\\\ell=6}} = \frac{1 \times 2^2}{6 \times E \times I \times 6^3}\left[(2\times2 - 3\times6)\,4^3 + 3\times6\times(6-2)\,4^2\right] =$

$= \frac{1}{EI} \times 0{,}7901$

Então, a matriz dos coeficientes de flexibilidade é:

$$[a] = \frac{1}{EI}\begin{bmatrix} 0{,}7901 & 0{,}5432 \\ 0{,}5432 & 0{,}7901 \end{bmatrix}$$

b) Matriz de rigidez:

$$[k] = [a]^{-1} = \begin{bmatrix} 2.4001 & -1{,}6501 \\ -1{,}6501 & 2.4001 \end{bmatrix} EI \quad [N/m]$$

c) Em notação matricial, temos: $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$