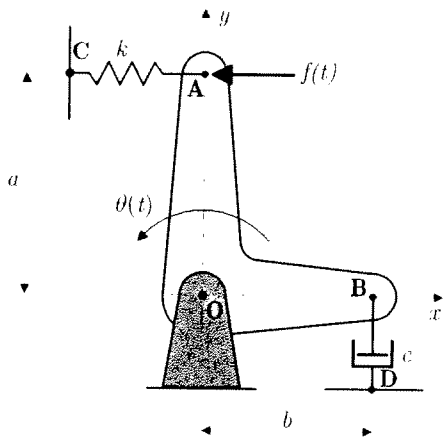


1) (6 val.) A barra em forma de **L** representada na figura oscila em torno do ponto **O**. A barra está ligada ao exterior, através de uma mola linear de rigidez k no ponto **A** e através de um amortecedor viscoso de coeficiente c no ponto **B**. O momento de inércia da barra em relação a um eixo que passa por **O**, perpendicular ao plano Oxy, é J. No ponto **A** está aplicada uma solicitação $f(t)$ na direcção horizontal.

Considerando que na posição de equilíbrio estático o eixo **OA** está na vertical, determinar:

a) (20%) A equação diferencial (linearizada) de movimento do sistema.

Para a aplicação numérica,

$k = 1200$ N/m $\quad c = 40$ Ns/m $\quad J = 0.1$ kgm^2 $\quad a = 0.15$ m $\quad b = 0.12$ m

determinar:

b) (10%) A razão de amortecimento;

c) (10%) A frequência angular amortecida e o respectivo período.

Para uma perturbação inicial $\theta_0 = 10^o$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s, determinar,

d) (10%) o número de ciclos necessários para que a amplitude se atenue para um valor inferior a 5% de θ_0;

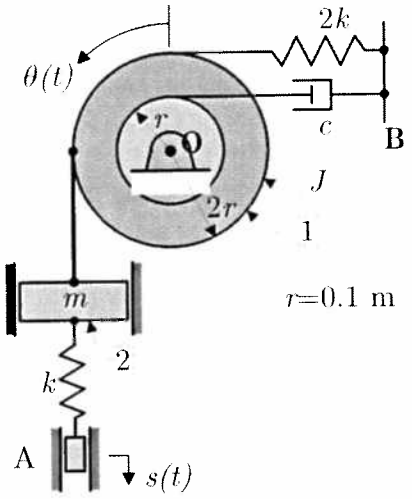
e) (15%) a energia dissipada até ao instante em que o sistema passa pela segunda vez na posição de equilíbrio estático.

Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ com uma amplitude de 50 N e uma frequência de 3 Hz, determinar:

f) (15%) a resposta estacionária do sistema;

g) (10%) a força transmitida ao apoio **D**;

h) (10%) a frequência de ressonância e a amplitude máxima de resposta no ponto **A**.



2) (6 val.) O sistema representado na figura é constituído por:

- corpo 1, polia que roda em torno do ponto **O**, com momento de inércia J, e que está ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez $2k$ e de um amortecedor viscoso de constante c;
- corpo 2, massa m que translada verticalmente e que está ligada à polia através de um tirante e a uma mola linear elástica de rigidez k que, na outra extremidade, está submetida a um deslocamento $s(t)$.

Na situação de equilíbrio estático, $\theta(t) = 0$ rad e $s(t) = 0$ m.

a) (20%) Estabelecer a equação diferencial (linearizada) do movimento.

Para resolver as alíneas seguintes, assumir que a equação do movimento é a seguinte:

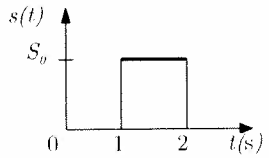
$$0.1\ddot{\theta}(t) + 0.1\dot{\theta}(t) + 192\theta(t) = 320s(t)$$

b) (20%) Determinar a(s) frequência(s) do movimento harmónico $s(t) = 0.02\cos(\omega t)$ para a qual(s) a amplitude de deslocamento da massa, em regime estacionário, não ultrapassa 10 mm.

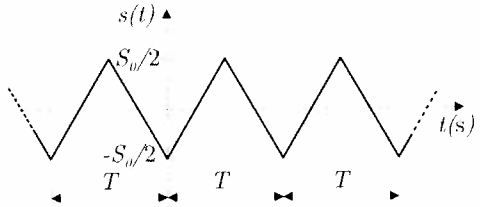
c) (20%) Nas condições da alínea anterior, determinar a amplitude máxima da componente horizontal da força no apoio **O**.

Na resolução das alíneas seguintes, assumir que o amortecimento é nulo.

d) (20%) Determinar uma expressão para a rotação do disco no intervalo $1 \le t \le 2$ s, quando ao disco é aplicada a perturbação inicial ($t = 0$ s) $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 1$ rad/s e o ponto **A** é sujeito ao deslocamento transiente $s(t)$ representado na figura seguinte.



e) (20%) Admitindo que o deslocamento $s(t)$ é periódico com período $T = 0.2$ s e com a forma representada na figura seguinte, obter uma estimativa para o deslocamento angular do disco (pretende-se a melhor estimativa dada por uma expressão com apenas um termo função do tempo).



Nota:

$$\int x\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} \qquad \int x\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$$

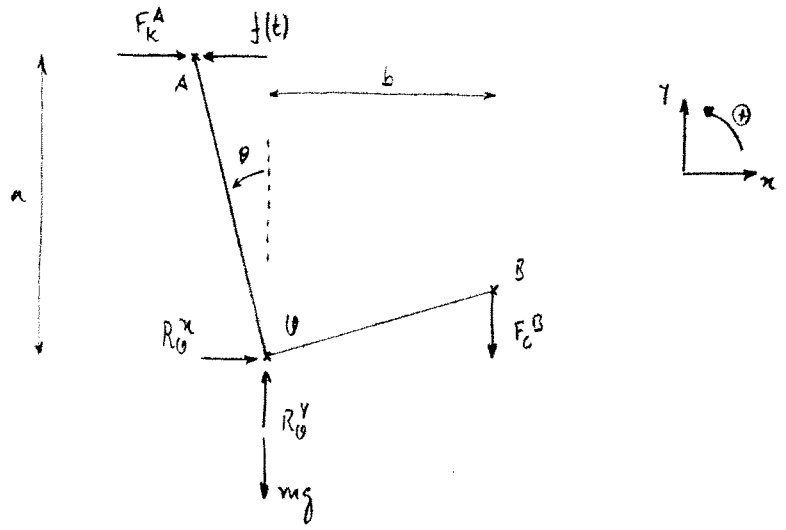
$$\int x^2\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(-a^2x^2\cos(ax) + 2\cos(ax) + 2ax\sin(ax)\right)$$

$$\int x^2\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(a^2x^2\sin(ax) - 2\sin(ax) + 2ax\cos(ax)\right)$$

Exame de 1ª Prova de Avaliação de 29-04-2009 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

Quando o sistema é perturbado temos:



a) No ponto A:

$$\vec{v_A} = \begin{Bmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v_A} = \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_k^A} = -K \times \Delta\vec{v_A} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} K_0\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B:

$$\vec{v_B} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v_B} = \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v_B} = \vec{v_C} = \begin{Bmatrix} 0 \\ b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_c^B} = -c \times \vec{v_c} = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K_O} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\,\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento:

$$\sum \vec{\pi}_O = \vec{K}_O \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times \left(\vec{F}_K^A + \vec{F}(t) \right) + \vec{OB} \times \vec{F}_C^B = \vec{K}_O \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} Ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (=)$$

$$(=) \quad -Ka^2\theta + a f(t) - cb^2\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \quad J\ddot{\theta} + cb^2\dot{\theta} + Ka^2\theta = a f(t)$$

Temos finalmente:

$$J\ddot{\theta}(t) + cb^2\dot{\theta}(t) + Ka^2\theta(t) = a f(t)$$

b) A equação do movimento é:

$$0{,}1\,\ddot{\theta}(t) + 40 \times 0{,}12^2\,\dot{\theta}(t) + 1200 \times 0{,}15^2\,\theta(t) = 0{,}15 f(t) \quad (=)$$

$$(=) \quad 0{,}1\,\ddot{\theta}(t) + 0{,}576\,\dot{\theta}(t) + 27\,\theta(t) = 0{,}15 f(t)$$

Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 \times m_{eq} \times \omega_n} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}576}{2 \times 0{,}1 \times 16{,}43168} = 0{,}17527$$

Frequência natural não amortecida:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{27}{0{,}1}} = 16{,}43168 \ rad/s$$

c) Frequência natural amortecida:

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 16{,}43168 \times \sqrt{1 - 0{,}17527^2} = 16{,}17732 \ rad/s$$

Período natural amortecido:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{16{,}17732} = 0{,}38839 \ s$$

d) Perturbação inicial: $\theta_0 = 10° = \frac{10 \times \pi}{180} = 0{,}17453 \text{ rad}$

$$\dot{\theta}_0 = 0 \text{ rad/s}$$

Pretende-se atenuar o valor de θ_0 para $\theta_0' = 0{,}17453 \times 0{,}05 = 0{,}00873$.

Decremento logarítmico:

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \delta = \frac{2\pi \times 0{,}17527}{\sqrt{1-0{,}17527^2}} = 1{,}11857$$

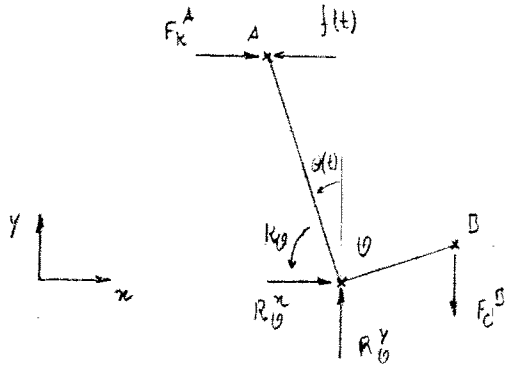
$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \quad \therefore \quad 1{,}11857 = \frac{1}{N} \times \ln \frac{0{,}17453}{0{,}00873} \Leftrightarrow N = 2{,}67782$$

Deste modo, são necessários $N=3$ ciclos para a amplitude se atenue para o valor pretendido.

e)

1ª Prova de Avaliação 29-04-2009
Parte Prática
Exercício 1

a) · Diagrama de corpo livre



$\overline{OA} = a$
$\overline{OB} = b$

· No ponto A, temos:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \quad \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} -a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_C = \begin{Bmatrix} -a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_K^A} = -k \times \Delta\vec{OA} = -k \times \left[\begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B, temos:

$$\vec{OB} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ b\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \quad \vec{OB} = \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_B = \begin{Bmatrix} 0 \\ b\ddot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_C^B} = -c \times \vec{v}_B = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

· Como o ponto $O \equiv G$, temos:

$$\vec{k_O} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_O\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação diferencial do movimento:

$$\sum \vec{H}_O = \vec{K}_O \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \vec{OA} \times \left(\vec{F_K^A} + \vec{f(t)} \right) + \vec{OB} \times \vec{F_C^B} = \vec{K}_O \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} Ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_O \ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad -Ka^2\theta + a f(t) - cb^2\dot{\theta} = J_O \ddot{\theta}$$

Então:

$$\underbrace{J_O}_{m_{eq}} \ddot{\theta}(t) + \underbrace{cb^2}_{c_{eq}} \dot{\theta}(t) + \underbrace{Ka^2}_{K_{eq}} \theta(t) = \underbrace{a f(t)}_{F_{eq}} \quad //$$

b) Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 \times m_{eq} \times \omega_n}$$

O parâmetro ω_n (frequência natural de vibração ou frequência natural não amortecida) é dado por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{1200 \times 0.15^2}{0.1}} = 16{,}4317 \text{ rad/s}$$

Então:

$$\zeta = \frac{40 \times 0.12^2}{2 \times 0.1 \times 16{,}4317} = 0{,}1753 \quad , \text{ estamos perante um sistema sub-amortecido!} \quad //$$

c) Frequência angular amortecida

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1 - \zeta^2} = 16{,}4317 \times \sqrt{1 - 0{,}1753^2} = 16{,}1773 \text{ rad/s} \quad //$$

Período amortecido:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{16{,}1773} = 0{,}3884 \text{ s} \quad //$$

d) · Temos que:

$\theta_0 = 10° = 0{,}174533$ rad $\Rightarrow$ 5% de θ_0 é $\theta_0' = 0{,}5° = 0{,}008727$ rad

Decremento logarítmico

$$\delta = \frac{2\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}} \qquad \delta = \frac{2\times\pi\times 0.1753}{\sqrt{1-0.1753^2}} = 1{,}1188$$

Para saber N, temos:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2 = t_1 + NT)}$$

$$1{,}1188 = \frac{1}{N} \ln \frac{0{,}174533}{0{,}008727} \Leftrightarrow N = 2{,}6776$$

· O número de ciclos necessários é aproximadamente $N = 3$. //

e) · No instante inicial, temos:

$\theta_0 = 10°$, $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s

$T = 0$ J

$V = \frac{1}{2} K [\theta(t)]^2 \Leftrightarrow V = \frac{1}{2} \times K \times [-a\theta]^2 \therefore$

$\therefore V = \frac{1}{2} \times 1200 \times [-0{,}15 \times 0{,}174533]^2 \Leftrightarrow V = 0{,}4112$ J

· No instante em que o sistema passa pela segunda vez na posição de equilíbrio estático, temos:

$V = 0$ J

$T = \frac{1}{2} m [\dot{\theta}(t)]^2$

A resposta natural para um sistema sub-amortecido é dada por:

$$\theta(t) = A e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2 + \theta_0^2} \therefore$$

$$\therefore \quad A = \sqrt{\left(\frac{0 + 0.1753 \times 16.4317 \times 0.174533}{16.4317 \times \sqrt{1 - 0.1753^2}} \right)^2 + 0.174533^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad A = 0,1773 \text{ rad}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}\, \theta_0} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{0 + 0.1753 \times 16.4317 \times 0.174533}{16.4317 \times \sqrt{1 - 0.1753^2} \times 0.174533} \quad (=)$$

$$(=) \quad \phi = 0.1762 \text{ rad}$$

Então

$$\theta(t) = 0.1773 \times e^{-0.1753 \times 16,4317 \times t} \cos(16,1773 \times t - 0.1762)$$

A velocidade de resposta natural é dada por

$$\dot{\theta}(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \left(-\zeta \omega_n \cos(\omega_d t - \phi) - \omega_d \operatorname{sen}(\omega_d t - \phi) \right) \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \dot{\theta}(t) = 0.1773 \times e^{-0.1753 \times 16,4317 \times t} \times \left(-0.1753 \times 16.4317 \times \cos(16,1773 \times t - 0.1762) - 16,1773 \times \operatorname{sen}(16,1773 \times t - 0.1762) \right)$$

O instante em que o sistema para pela segunda vez no ponto de equilíbrio estático é dado por

$$t\Big|_{\theta(t)=0} = \frac{1}{\omega_d} \left(\frac{2n-1}{2} \pi + \phi \right) \wedge n = 2 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad t\Big|_{\theta(t)=0} = \frac{1}{16,1773} \times \left(\frac{2 \times 2 - 1}{2} \times \pi + 0.1762 \right) \quad (=)$$

$$(=) \quad t\Big|_{\theta(t)=0 \wedge n=2} = 0,3022 \text{ s}$$

Então :

$$\dot{\theta}(t = 0.3022\,s) = 1,2011 \text{ rad/s}$$

Então, a energia cinética é:

$$T = \frac{1}{2} \times 0,1 \times 1,2011^2 = 0.0721 \text{ J}$$

A energia dissipada é dada por:

$$E_{dissipada} = V - T =$$

$$= 0.4112 - 0,0721 =$$

$$= 0,3391 \text{ J}$$

f) · Resposta estacionária do sistema

$$\theta(t) = \Theta_s \mu \cos(\omega t - \phi)$$

A razão de frequências β é dada por: (ω → frequência de excitação)

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{2 \times \pi \times f}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{2 \times \pi \times 3}{16,4317} = 1,1471$$

O deslocamento estático x_s é dado por

$$\Theta_s = \frac{F_{eq}}{k_{eq}} \Leftrightarrow \Theta = \frac{a \times F}{K a^2} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \Theta_s = \frac{0.15 \times 50}{1200 \times 0.15^2} \Leftrightarrow \Theta_s = 0,2778$$

A amplitude $\Theta(\omega)$ é dada por:

$$\Theta(\omega) = \frac{\Theta_s}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \Theta(\omega) = \frac{0,2778}{\sqrt{(1-1,1471^2)^2 + (2 \times 0.1753 \times 1,1471)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \Theta(\omega) = 0.5432$$

Factor de amplificação dinâmica

$$\mu = \frac{\Theta(\omega)}{\theta_s} \qquad \mu = \frac{0.5432}{0.2778} = 1,9554$$

Então

$$\theta_p(t) = 0,2778 \times 1,9554 \times \cos(6\pi t + 0,9051) =$$

$$= 0,5432 \times \cos(6\pi t + 0,9051)$$

Em que ϕ é

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0,1753 \times 1,1471}{(1-1,1471^2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \phi = -0,9051$$

g) A força transmitida ao apoio O é simétrica da força de amortecimento:

$$\overrightarrow{F_c^{\,B}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Da equação do movimento, temos:

$$c_{eq} = cb^2 = 40 \times 0.12^2 = 0,576$$

Derivando $\theta(t)$, temos

h) $\omega_n = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2} = 16,4317 \times \sqrt{1-2 \times 0,1753^2} = 15,9187$

$$\Theta(\omega) = \frac{\frac{0,15 \times 50}{1200 \times 0,15^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{0,27778}{0,34517} = 0,80476 \text{ rad}$$

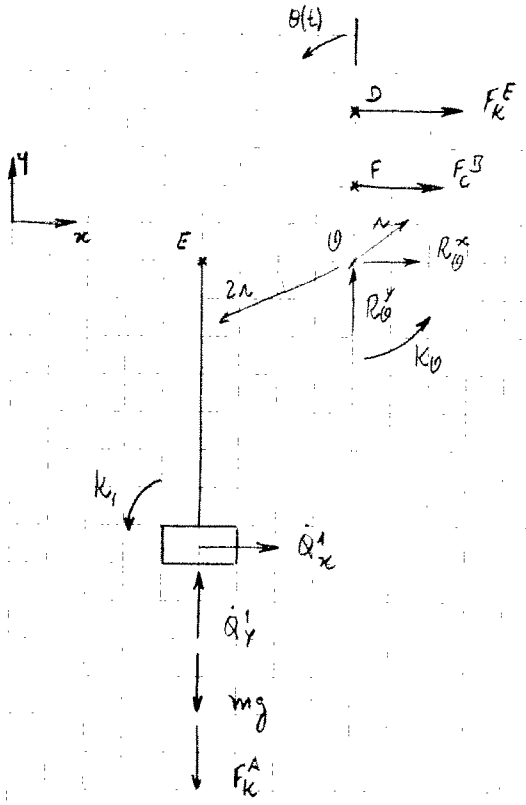
$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{15,9187}{16,4317} = 0,96878$$

No ponto A:

A velocidade máxima é $0,15 \times 0,80476 = 0.12071$ m

1ª Prova de Avaliação 29-04-2009
Parte prática
Exercício 2

a) Diagrama de corpo livre



$r = 0.1\ m$

No ponto D, temos:

$$\overrightarrow{OD} = \begin{Bmatrix} -2r\sin\theta \\ 2r\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando } \quad \overrightarrow{OD} = \begin{Bmatrix} -2r\theta \\ 2r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Na situação de equilíbrio estático, temos:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{0} \quad : \quad \overrightarrow{OD} \times \vec{F}_K^D + \overrightarrow{OE} \times m\vec{g} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} -2r\theta \\ 2r \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} K\theta_0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2r \\ -2r\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2rK\theta_0 + 2rmg = 0 \Leftrightarrow \theta_0 = \frac{mg}{K}$$

$$\vec{F}_K^D = -K \times \Delta\overrightarrow{OD} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} -2r\theta \\ 2r \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} mg/K \\ 2r \\ 0 \end{Bmatrix} \right] =$$

$$= -K \times \begin{Bmatrix} -2r\theta - mg/k \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2rK\theta + mg \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto F, temos:

$$\vec{OF} = \begin{Bmatrix} -r\sin\theta \\ r\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OF} = \begin{Bmatrix} -r\theta \\ r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_F = \begin{Bmatrix} -r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad ; \quad \vec{a}_F = \begin{Bmatrix} -r\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F_c'} = -c \times \vec{v}_F = -c \times \begin{Bmatrix} -r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} cr\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$