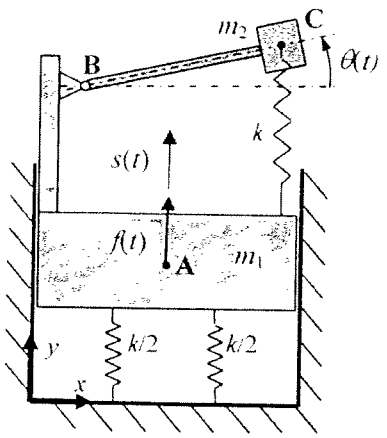


1) (6 val.) O sistema com dois graus de liberdade - $s(t)$ e $\theta(t)$ - representado na figura é constituído por um bloco e pelo pêndulo **BC**. O bloco tem massa m_1, está ligado a uma fundação por 2 molas lineares elásticas de rigidez $k/2$ e é actuado por uma força $f(t)$. O pêndulo **BC** é formado por uma viga rígida, de comprimento a ($\overline{BC} = a$) e de massa desprezável, e por uma massa m_2 localizada no ponto **C**. O mesmo pêndulo encontra-se ligado ao bloco por uma rótula plana em **B** e por uma mola linear elástica de rigidez k em **C**. Quando $\theta = 0$ rad e $s = 0$ m, o sistema está em equilíbrio estático.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema recorrendo ao formalismo de Lagrange.

b) (20%) Supondo que é aplicada uma excitação da forma $f(t) = F\cos(\omega t)$, com ω a frequência natural do sistema sem o pêndulo (i.e., o sistema formado apenas pelo bloco e molas que o ligam à fundação), determinar a expressão a que m_2 deve obedecer por forma que as vibrações do bloco cessem.

Para responder às alíneas seguintes admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

c) (20%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal.

e) (20%) Supondo que $m_1 = 10$ kg, $m_2 = 1$ kg e $k = 2000$ N/m e considerando a resposta estacionária do sistema a uma força $f(t) = 10\cos(48t)$ N, obter, utilizando a análise modal truncada, uma estimativa para a força que as molas transmitem à fundação.

2) (6 val.) Na figura representa-se um veio de secção recta constante com momento polar I_p e de material com módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. Na extremidade $x = 0$, o veio está ligado a uma mola de torção de rigidez k_t e em $x = \ell/2$ está montada uma roda de momento polar de inércia J.

a) (10%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (10%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $\Theta(x) = \delta + \frac{x}{\ell}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração no método de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $\Theta(x)$.

Para $k_t = \alpha \frac{GI_p}{\ell}$ e $J = \beta \rho I_p \ell$,

c) (30%) Calcular a estimativa ω_{1R} da frequência natural de vibração utilizando o método de Rayleigh. Exprimir o resultado na forma $\omega_{1R} = \sqrt{\frac{G}{\rho \ell^2}} g(\delta, \alpha, \beta)$ onde $g(\delta, \alpha, \beta)$ representa uma função.

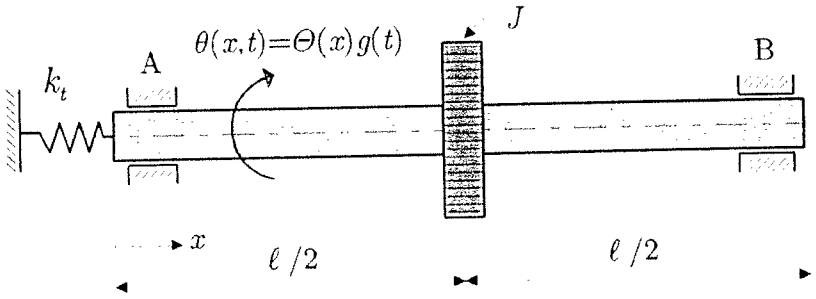
d) (15%) Discutir, justificando, a validade da solução obtida pelo método de Rayleigh para os valores limite de k_t : $k_t \to 0$ e $k_t \to \infty$.

Para $\alpha = 2$ e $\beta = 9$,

e) (15%) Determinar o valor óptimo do parâmetro δ da função $\Theta(x)$ como aproximação da primeira forma natural de vibração para o método de Rayleigh.

Para $J = 0$, utilizando a solução analítica exacta da torção para um veio de secção constante, $\theta(x,t) = \left(A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x \right) (C \cos \omega t + D \sin \omega t)$,

f) (20%) Estabelecer a equação de frequências naturais de vibração de torção para o veio considerado.



2ª Prova de avaliação 23-06-2009
Parte Prática
Exercício 1

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = s(t) \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{s}(t)$
$q_2 = \theta(t) \Rightarrow \dot{q}_2 = \dot{\theta}(t)$

Energia cinética:

$$T = \tfrac{1}{2} \times m_1 \times \dot{s}^2 + \tfrac{1}{2} \times m_2 \times (\dot{s} + a \operatorname{sen} \dot{\theta})^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow T = \tfrac{1}{2} \times m_1 \times \dot{s}^2 + \tfrac{1}{2} \times m_2 \times (\dot{s} + a\dot{\theta})^2$$

Energia potencial:

$$V = \tfrac{1}{2} k_{/2} s^2 + \tfrac{1}{2} k_{/2} s^2 + \tfrac{1}{2} k \times (a \operatorname{sen} \theta)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow V = k_{/2} s^2 + k_{/2} (a\theta)^2$$

Forças não - conservativas:

$$Q_1 = f(t) \frac{\partial s}{\partial s} + 0 \frac{\partial \theta}{\partial s} = f(t)$$

$$Q_2 = f(t) \frac{\partial s}{\partial \theta} + 0 \frac{\partial \theta}{\partial \theta} = 0$$

Considerando as equações de Lagrange na forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = m_1 \dot{s} + m_2 (\dot{s} + a\dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{s}}\right) = m_1 \ddot{s} + m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta})$$

$$\frac{\partial T}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial s} = k s$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = m_2 (\dot{s} + a\dot{\theta})\, a = a m_2 (\dot{s} + a\dot{\theta})$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = a\, m_2 \left(\ddot{s} + a\ddot{\theta}\right)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K a \theta\, a = K a^2 \theta$$

Temos então:

$$\begin{cases} m_1 \ddot{s} + m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta}) - 0 + Ks = f(t) \\ a m_2 (\ddot{s} + a\ddot{\theta}) - 0 + K a^2 \theta = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & a m_2 \\ a m_2 & m_2 a^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{s}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & a^2 K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Excitação na forma $f(t) = F\cos(\omega t)$

Temos:

$$\begin{Bmatrix} s(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{s}(\omega) \\ \bar{\theta}(\omega) \end{Bmatrix} \cos(\omega t)$$

$$\left[[k] - \omega^2 [m]\right] \{u\} = \{f(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} K - \omega^2 (m_1 + m_2) & 0 - \omega^2 (a m_2) \\ 0 - \omega^2 (a m_2) & a^2 K - \omega^2 (a^2 m_2) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{s}(\omega) \\ \bar{\theta}(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$S(\omega) = \frac{z_{22} F_1 - z_{12} F_2}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} =$$

$$= \frac{\left[a^2 K - \omega^2 a^2 m_2\right] F - 0}{\left[K - \omega^2 (m_1 + m_2)\right] \cdot \left[a^2 K - \omega^2 a^2 m^2\right] - \left[\omega^2 a m_2\right]^2}$$

Para que $S(\omega) = 0$, então: $\cancel{a^2} K = \omega^2 \cancel{a^2} m_2 \Leftrightarrow m_2 = \frac{K}{\omega^2}$

Como $m_1 = \frac{k}{\omega^2}$, então: $m_1 = m_2$.

c) Considerando:

$$\begin{bmatrix} 11 & 0.5 \\ 0.5 & 0.25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2000 & 0 \\ 0 & 500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Temos então:

$$\begin{bmatrix} 2000 - \omega^2\, 11 & 0 - \omega^2\, 0.5 \\ 0 - \omega^2 0.5 & 500 - 0.25\,\omega^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2000 - 11\,\omega^2 & -0{,}5\,\omega^2 \\ -0{,}5\,\omega^2 & 500 - 0{,}25\,\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \quad \omega_1 = 13{,}424 \ \text{rad/s} \quad \vee \quad \omega_2 = 47{,}115 \ \text{rad/s}$

1ª Forma natural:

$$\left[2000 - 11 \times 13{,}424^2 \right] u_1 - \left[0{,}5 \times 13{,}424^2 \right] u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u_1 = 5{,}074\ u_2 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 5{,}074 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

2ª Forma natural:

$$\left[2000 - 11 \times 47{,}115^2 \right] u_1 - \left[0{,}5 \times 47{,}115^2 \right] u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad u = -0{,}0495\ u_2 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}0495 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

d) Temos:

$$\bullet \ \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1 \right]^{0.5}} \{u\}_1$$

$$\therefore \ \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 5{,}074 ; 1 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 11 & 0{,}5 \\ 0{,}5 & 0{,}25 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 5{,}074 \\ 1 \end{Bmatrix} \right]^{0{,}5}} \begin{Bmatrix} 5{,}074 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}2987 \\ 0{,}0589 \end{Bmatrix}$$

$$\bullet \ \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_2 \right]^{0.5}} \{u\}_2$$

$$\therefore \ \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} -0.1038 \\ 2{,}0968 \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base nodal:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T\{f(t)\}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 13{,}424^2 & 0 \\ 0 & 47{,}115^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}2987 & 0{,}0589 \\ -0{,}1038 & 2{,}0968 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

$$(*) \quad \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 13{,}424^2\,\eta_1(t) = 0{,}2987\,f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 47{,}115^2\,\eta_2(t) = -0{,}1038\,f(t) \end{cases} \quad (2)$$

e) $m_1 = 10\ kg$
$m_2 = 1\ kg$
$K = 2000\ N/m$

$f(t) = 10\cos(48t)\ [N]$

Temos que $\omega_2 = 47{,}115\ rad/s$ é o valor mais próximo de $\omega = 48\ rad/s$, então, através da equação 2, temos:

$$\ddot{\eta}_2(t) + 47{,}115^2\,\eta_2(t) = -0{,}1038\,f(t)$$

$$\ddot{\eta}_2(t) + 47{,}115^2\,\eta_2(t) = +0{,}1038 \times 10 \times \cos(48t)$$

$$\eta(\omega) = \frac{\frac{0{,}1038 \times 10}{47{,}115^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2}} = 0.0123$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{48}{47{,}115}$$

$$\eta_2(t) = 0{,}0123\cos(48t)$$

Então: $\begin{Bmatrix} \Delta(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = [\Phi] \times \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix}$

$$\begin{cases} \Delta(t) = 0{,}2987 \times \eta_1 + (-0{,}1038)\,\eta_2 \\ \theta(t) = 0{,}0589 \times \eta_1 + 2.0968\,\eta_2 \end{cases}$$

$$\Delta(t) = -0{,}1038 \times 0{,}0123\cos(48t) = -0{,}00128\cos(48t)$$

Finalmente:

$$\vec{F} = 2 \times \frac{K}{2} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta(t) \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ (m_1+m_2)g \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -2{,}553\cos(48t) - 109{,}8 \end{Bmatrix}$$

2ª Prova de avaliação 23-06-2009
Parte Prática
Exercício 2

a) Condições de fronteira:

$x = 0$: $\quad G I_p \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=0} = k_t \times \theta(x)\Big|_{x=0}$

$x = \ell$: $\quad G I_p \left.\frac{\partial \theta}{\partial x}\right|_{x=\ell} = 0$

Ambas as condições de fronteira são naturais.

b) Função de aproximação : $\Theta(x) = \delta + \frac{x}{\ell}$

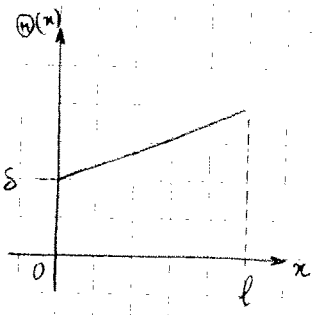
Derivável pelo menos uma vez (problema de 2ª ordem):

$\frac{d\Theta}{dx} = \frac{1}{\ell} \quad \Rightarrow$ Verifica !

· Respeitar as condições de fronteira geométricas :

Não existem , logo estão verificadas !

Esboço:



c) $V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^\ell G I_p \left(\frac{\partial \Theta}{\partial x}\right)^2 dx + V_{cfn} =$

$= \frac{1}{2} G I_p \int_0^\ell \left(\frac{1}{\ell}\right)^2 dx + V_{cfn} =$

$= \frac{1}{2} G I_p \frac{1}{\ell} + \frac{1}{2} \times k_t \times \left[\theta(x)\right]^2_{x=0} =$

$= \frac{G I_p}{2} \frac{1}{\ell} + \frac{1}{2} \propto \frac{G I_p}{\ell} \times \delta^2 =$

$= \frac{G I_p}{2\ell} \left(1 + \propto \delta^2\right)$

$$T_{máx} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell \rho(x) \left(\Theta(x) \right)^2 dx + T^*_{cfjn} \right) =$$

$$= \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^\ell \beta \rho I_p \ell \left(\delta + \frac{x}{\ell} \right)^2 dx + \frac{1}{2} J \left[\Theta(x) \Big|_{x=\ell/2} \right]^2 \right) =$$

$$= \omega^2 \left(\frac{1}{2} \beta \rho I_p \int_0^\ell \ell \left(\delta^2 + 2\frac{\delta x}{\ell} + \frac{x^2}{\ell^2} \right) dx + \frac{1}{2} J \left(\delta + \frac{1}{2} \right) \right) =$$

$$=$$