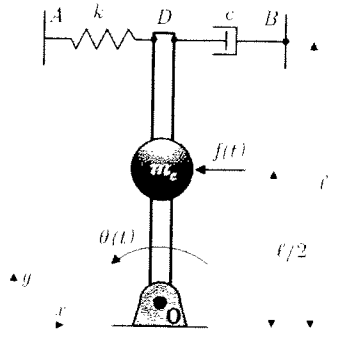


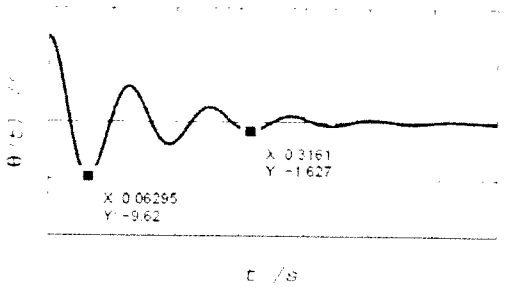
1) (4 val.) A figura representa um pêndulo invertido constituído por uma barra rígida de massa m_b e de comprimento ℓ, articulada numa das extremidades e, na outra, ligada ao exterior através de um amortecedor viscoso de constante c e de uma mola linear elástica de constante k. Em $\ell/2$ está montada uma massa concentrada m_c. O movimento angular do pêndulo é caracterizado pela coordenada generalizada $\theta(t)$. Para $\theta(t)=0$, a barra encontra-se na vertical.

a) (20%) Estabelecer a equação diferencial de movimento;

Para caracterizar o amortecimento do sistema, aplica-se uma perturbação inicial que provoca a resposta livre ou natural representada na figura.

Para a aplicação numérica

$m_b = 0.82\,\text{kg}$ $\quad m_c = 0.50\,\text{kg}$ $\quad \ell = 300\,\text{mm}$,



determinar:

b) (10%) o decremento logarítmico e a razão de amortecimento;

c) (10%) frequência natural amortecida e não amortecida;

d) (10%) a constante k de rigidez da mola;

e) (10%) a constante c do amortecedor viscoso;

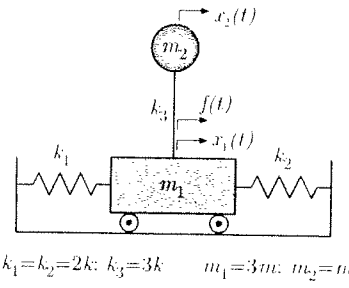
Para caracterizar o comportamento do sistema em frequência, aplica-se uma força harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ de amplitude $F = 12\,\text{N}$ e faz-se variar a frequência.

Determinar:

f) (10%) a frequência para a qual a amplitude $\Theta(\omega)$ é máxima e a respectiva amplitude;

g) (20%) a(s) frequência(s) ω de excitação para a(s) qual(is) a elongação da mola e/ou o curso do amortecedor seja inferior a $10\,\text{mm}$.

h) (10%) nas condições da alínea anterior, determinar o valor máximo da força desenvolvida pelo amortecedor.



$k_1=k_2=2k;\ k_3=3k$ $\quad m_1=3m;\ m_2=m$

2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera, respectivamente.

a) (20%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para resolver as alíneas seguintes, utilizar as equações de movimento seguintes:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (20%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

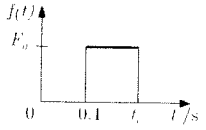
Para $k = 200\ \text{Nm}^{-1}$ e $m = 2\ \text{kg}$,

c) (20%) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 14.4\ \text{rads}^{-1}$.

d) (10%) Se $f(t) = F\cos\omega t$, determinar a frequência de excitação ω para a qual o sistema barra/esfera actua como um absorsor de vibrações.

e) (10%) Escrever as equações de movimento do sistema na base modal.

f) (20%) Determinar uma estimativa do valor máximo da resposta $x_1(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura com $t_c = 0.5\ s$.



Momento dinâmico:

$$\vec{K}_{\theta}{}_{\text{Total}} = \vec{K}_{\theta}{}_{\text{massa c}} + \vec{K}_{\theta}{}_{\text{barra}} =$$

$$= \vec{K}_{C}{}_{\text{massa c}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}_{C}{}_{\text{massa}_C} + \vec{K}_{C}{}_{\text{barra}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}_{C}{}_{\text{barra}}$$

$$J_{\theta} = J_{\theta}{}_{\text{barra}} + J_{\theta}{}_{\text{massa}} = \quad = 0, \text{ porque é massa concentrada}$$

$$= J_{C}{}_{\text{barra}} + m_{\text{barra}} \times \overline{OC}^2 + J_{C}{}_{\text{massa}} + m_{\text{massa}} \times \overline{OC}^2 =$$

$$= \frac{1}{12} \times m_{\text{barra}} \times \ell^2 + m_{\text{barra}} \times \frac{\ell^2}{4} + m_{\text{massa}} \times \frac{\ell^2}{4} =$$

$$= \frac{4}{12} m_{\text{barra}} \ell^2 + m_{\text{massa}} \frac{\ell^2}{4} =$$

$$= \left(\frac{1}{3} m_{\text{barra}} + \frac{1}{4} m_{\text{massa}}\right) \ell^2$$

Equação do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_{\theta} = \vec{K}_{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \quad \vec{OC} \times \vec{F}(t) + \vec{OC} \times \left(m_c \vec{g} + m_b \vec{g}\right) + \vec{OD} \times \left(\vec{F}_K^D + \vec{F}_C^D\right) = \vec{K}_{\theta} \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} -\ell/2\,\theta \\ \ell/2 \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_c g \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ -m_b g \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} -\ell\theta \\ \ell \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} k\ell\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} c\ell\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \left(\frac{1}{3} m_b + \frac{1}{4} m_c\right) \ell^2 \ddot{\theta} \end{Bmatrix} (=$$

$$(=) \quad \ell/2\,\theta \left(m_c g + m_b g\right) + \ell/2\, f(t) - k\ell^2\theta - c\ell^2\dot{\theta} = \left(\frac{1}{3} m_b + \frac{1}{4} m_c\right) \ell^2 \ddot{\theta} \quad (=$$

$$(=) \quad \left(\frac{1}{3} m_b + \frac{1}{4} m_c\right) \ell^2 \ddot{\theta} + c\ell^2\dot{\theta} + \left(k\ell^2 - \ell/2\left(m_c g + m_b g\right)\right)\theta = \ell/2\, f(t)$$

Temos finalmente:

$$\left(\frac{1}{3} m_b + \frac{1}{4} m_c\right) \ell^2\, \ddot{\theta}(t) + c\ell^2\dot{\theta}(t) + \left(k\ell^2 - \ell/2\left(m_c g + m_b g\right)\right)\theta(t) = \ell/2\, f(t)$$

b) Decremento logarítmico:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{2} \ln \frac{-9{,}62}{-1{,}627} = 0{,}88855$$

Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}88855}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0{,}88855^2}} = 0{,}14002$$

c) A equação do movimento é:

$$\left(\tfrac{1}{3} m_b + \tfrac{1}{4} m_c\right) \ell^2 \ddot{\theta}(t) + c\ell^2 \dot{\theta}(t) + \left(K\ell^2 - \tfrac{\ell}{2}(m_c g + m_b g)\right)\theta(t) = \tfrac{\ell}{2} f(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\tfrac{1}{3} \times 0{,}82 + \tfrac{1}{4} \times 0{,}50\right) \times 0{,}3^2 \ddot{\theta}(t) + 0{,}3^2 c \dot{\theta}(t) + \left(K \times 0{,}3^2 - 0{,}15\left(0{,}50 \times 9{,}8 + 0{,}82 \times 9{,}8\right)\right)\theta(t) =$$

$$= 0{,}15 f(t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}03585 \ddot{\theta}(t) + 0{,}3^2 c \dot{\theta}(t) + \left(0{,}3^2 K - 1{,}9404\right)\theta(t) = 0{,}15 f(t)$$

Período natural amortecido:

$$T_d = \frac{t_2 - t_1}{N} \quad \therefore \quad T_d = \frac{0{,}3161 - 0{,}06295}{2} = 0{,}12658 \ s$$

Frequência natural amortecida:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{2\pi}{0{,}12658} = 49{,}63806 \ rad/s$$

Frequência natural não amortecida:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad 49{,}63806 = \omega_n \sqrt{1 - 0{,}14002^2} \Leftrightarrow \omega_n = 50{,}13193 \ rad/s$$

d) Frequência natural não amortecida:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad 50{,}13193 = \sqrt{\frac{\left(0{,}3^2 K - 1{,}9404\right)}{0{,}03585}} \Leftrightarrow K = 1022{,}65548 \ N/m$$

e) Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad \therefore \quad 0{,}14002 = \frac{0{,}3^2 c}{2 \times 0{,}03585 \times 50{,}13193} \Leftrightarrow c = 5{,}59218 \ Ns/m$$

f) Aplicando uma força harmónica: $f(t) = F \cos \omega t$; $F = 12N$

A amplitude $\theta(\omega)$ é máxima para a frequência de ressonância ω_r:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 50{,}13193 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}14002^2} = 49{,}13923 \ rad/s$$

Razão de frequências:

$$\beta = \frac{\omega_r}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{49{,}13923}{50{,}13193} = 0{,}98020$$

Factor de amplificação dinâmica máximo:

$$M_{máx} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \therefore \quad M_{máx} = \frac{1}{2 \times 0{,}14002 \times \sqrt{1 - 0{,}14002^2}} = 3{,}60645$$

A amplitude máxima de $\theta(\omega)$ é:

$$\mu_{max} = \frac{\theta(\omega)}{\theta_s} \quad \therefore \quad \theta(\omega) = 3{,}60645 \times \frac{0{,}15 \times 12}{0{,}3^2 \times 1022{,}65548 - 1{,}9404} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \theta(\omega) = 0{,}07205 \text{ rad} //$$

Exame de Recurso de 17-07-2009 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x_1$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{x}_1$
$q_2 = x_2$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{x}_2$

Energia cinética: $T = E_C = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2$

Energia potencial: $V = \frac{1}{2} \times k_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_2 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_3 \times x_2^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f(t)\, \delta x_1$

$$Q_1 = f(t) \frac{dx_1}{dx_1} + 0 = f(t)$$

$$Q_2 = 0 + 0 = 0$$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}_1}\right) = m_1 \ddot{x}_1$ $\quad \frac{dV}{dx_1} = k_1 x_1 + k_2 x_1$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$ $\quad \frac{dV}{dx_2} = k_3 x_2$

$$\begin{cases} m_1 \ddot{x}_1 + (k_1 + k_2) x_1 = f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_3 x_2 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial, as equações do movimento apresentam-se:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (*)$$

b) $(*) \begin{bmatrix} 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4k & 0 \\ 0 & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$

b) Frequências naturais de vibração:

$$\left| \begin{bmatrix} 5k - \omega^2 \times 2m & -k \\ -k & k - \omega^2 \times m \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_1 = 0{,}848071 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad V$$

$V \quad \omega_2 = 1{,}667566 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [rad/s]$

Primeira forma natural:

$$-K u_1 + \left(K - \omega_1^2 \times m\right) u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore -K u_1 + \left(K - 0{,}848071^2 \frac{K}{m} m\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad u_2 = 3{,}561563\, u_2 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3{,}561563 \end{Bmatrix}$$

Segunda forma natural:

$$-K u_1 + \left(K - \omega_2^2 m\right) u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore -K u_1 + \left(K - 1{,}667566^2 \frac{K}{m} m\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad u_2 = -0{,}561553\, u_2 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}561553 \end{Bmatrix}$$

c) Temos:

$$z_{11}(\omega) = -\omega^2 m_{11} + K_{11} \quad \therefore \quad z_{11}(\omega) = -14{,}4^2 \times 4 + 1000 = 170{,}56$$

$$z_{22}(\omega) = -\omega^2 m_{22} + K_{22} \quad \therefore \quad z_{22}(\omega) = -14{,}4^2 \times 2 + 200 = -214{,}72$$

$$z_{12}(\omega) = -\omega^2 m_{12} + K_{12} \quad \therefore \quad z_{12}(\omega) = 0 + (-200) = -200$$

Então, para $f(t) = F \cos \omega t$ com $\omega = 14{,}4$ rad/s temos:

$$X_1(\omega) = \frac{z_{22} F_1 - z_{12} F_2}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} \quad \therefore \quad X_1(\omega) = \frac{-214{,}72\, F}{(170{,}56 \times (-214{,}72)) - (-200)^2} = 0{,}002802\, F \ [m]$$

d) Para que o sistema barra-mola funcione como um absorsor de vibrações, temos:

$$\omega_s = \omega = \sqrt{\frac{K_2}{m_2}} \quad \therefore \quad \omega_s = \sqrt{\frac{200}{2}} = 10 \text{ rad/s}$$

Isto é, para uma frequência natural do sistema secundário $\omega_s = 10$ rad/s idêntica à frequência de excitação, a amplitude de deslocamento da massa principal é nula, e o sistema auxiliar diz-se sintonizado para a frequência de excitação.

e) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_1 \quad \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1\\3,561563\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\3,561563\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1\\3,561563\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,184524\\0,657193\end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right]^{1/2}} \{u\}_2 \quad \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1\\-0,561553\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}4&0\\0&2\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\-0,561553\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1\\-0,561553\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,464705\\-0,260959\end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base modal:

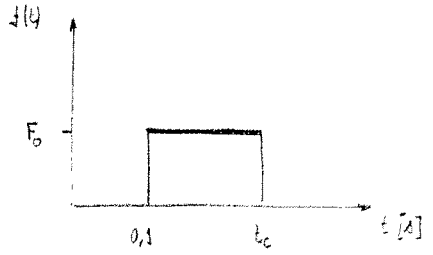
$$[I] \{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2] \{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1(t)\\\ddot{\eta}_2(t)\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0,848071^2 \times 100 & 0\\0 & 1,667566^2 \times 100\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\eta_1(t)\\\eta_2(t)\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0,184524 & 0,464705\\0,657193 & -0,260959\end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix}f(t)\\0\end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1(t)\\\ddot{\eta}_2(t)\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}71,922442 & 0\\0 & 278,077636\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\eta_1(t)\\\eta_2(t)\end{Bmatrix} = \begin{bmatrix}0,184524\ f(t)\\0,464705\ f(t)\end{bmatrix}$$

f) Solicitação transiente $f(t)$ com $t_c = 0,5\ s$:



$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \ 0 < t < 0,1 \\ F_0 & , \ 0,1 < t < t_c \\ 0 & , \ t > t_c \end{cases}$$

c) Temos:

$$X_1(\omega) = \frac{z_{22} F_1 - z_{12} F_2}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_1(\omega) = \frac{(200 - 2 \times 14{,}4^2) \times F - (-200) \times 0}{(5 \times 200 - 4 \times 14{,}4^2) \times (200 - 2 \times 14{,}4^2) - (-200)(-200)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_1(\omega) = 0{,}0028\ F$$

d) Através da equação 20.31, temos:

$$\beta^4 - \left(2 + \frac{m_2}{m_1}\right) \beta^2 + 1 = 0 \therefore$$

$$\therefore \beta^4 - \left(2 + \frac{m}{3m}\right) \times \beta^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta = 0{,}7522 \quad \vee \quad \beta = 1{,}3295$$

Temos agora:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_2}{m_2}} = \omega \therefore$$

$$\therefore \omega = \sqrt{\frac{2 \times 200}{2}} \Leftrightarrow \omega_n = 14{,}1421$$

e) Temos:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left(\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right)^{0,5}} \{u\}_1 \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left([0{,}2808;\ 1] \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0{,}2808 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)^{0,5}} \begin{Bmatrix} 0{,}2808 \\ 1 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}18454 \\ 0{,}65718 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left(\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right)^{0,5}} \{u\}_2 \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left([-1{,}7807;\ 1] \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -1{,}7807 \\ 1 \end{Bmatrix}\right)^{0,5}} \{u\}_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\phi\}_2 = \begin{Bmatrix} -0{,}46470 \\ 0{,}26097 \end{Bmatrix}$$

Temos agora:

$$[I]\left\{\ddot{\eta}(t)\right\} + [\Omega^2]\left\{\eta(t)\right\} = [\Phi]^T\left\{f(t)\right\} \quad \Phi$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 8,4807^2 & 0 \\ 0 & 16,6757^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,18454 & -0,46470 \\ 0,65718 & 0,26097 \end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Phi$$

$$(*) \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 8,4807^2\,\eta_1(t) = 0,18454\, f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 16,6757^2\,\eta_2(t) = -0,46470\, f(t) \end{cases} \quad //$$

f) Temos:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = [\Phi]\left\{\eta(t)\right\} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1(t) = \phi_{11}\,\eta_1(t) + \phi_{12}\,\eta_2(t)$$

Temos que verificar se $t \leq t_c$, então:

$$\omega_n = \frac{2\pi}{T_n} \rightarrow \omega_1 = \frac{2\pi}{T_{n_1}} \therefore 8,4807 = \frac{2\pi}{T_{n_1}} \Leftrightarrow T_{n_1} = 0,7409\ s$$

$$\rightarrow \omega_2 = \frac{2\pi}{T_{n_2}} \therefore 16,6757 = \frac{2\pi}{T_{n_2}} \Leftrightarrow T_{n_2} = 0,3768\ s$$

Então: $t_c \leq \frac{T_n}{2} \rightarrow 0,5 \leq \frac{0,7409}{2}$

$$\rightarrow 0,5 \leq \frac{0,3768}{2}$$

Usa-se então $x(t) = \frac{F_0}{K}\left(1 - \cos(\omega_n t_c)\right)$

Temos:

$$\eta_1 = \frac{0,18454\ F}{8,4807^2}\left(1 - \cos(8,4807 \times (0,5 - 0,1))\right) = 0,00505\ F$$

$$\eta_2 = \frac{-0,46470\ F}{16,6757^2}\left(1 - \cos(16,6757 \times 0,4)\right) = -1,2365 \times 10^{-4} \times F$$

Então: $x_1(t)_{máx} = 0,18454 \times 0,00505\,F + (-0,46470) \times (-1,2365 \times 10^{-4} \times F)$

$$= 9,89 \times 10^{-4} \times F$$

Exame de Recurso de 17-07-2009
Parte Prática (2ª Parte da Matéria)
Exercício 3

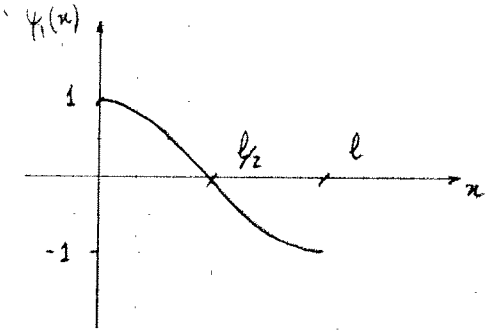
a) Para $x = 0$:

$$GI_p \left.\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=0} = J_1 \frac{\partial^2 \theta(0,t)}{\partial t^2}$$ ← Condição de fronteira Natural

Para $x = \ell$:

$$GI_p \left.\frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x}\right|_{x=\ell} = J_2 \frac{\partial^2 \theta(\ell,t)}{\partial t^2}$$ ← Condição de fronteira Natural

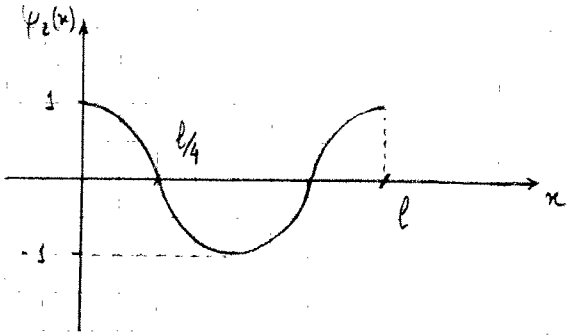
b) Para a função de aproximação : $\psi_1(x) = \cos \frac{\pi x}{\ell}$



$$\dot{\psi}_1(x) = -\frac{\pi}{\ell} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$\ddot{\psi}_2(x) = -\frac{\pi^2}{\ell^2} \cos \frac{\pi x}{\ell}$$

Para a função de aproximação : $\psi_2(x) = \cos \frac{2\pi x}{\ell}$



$$\dot{\psi}_2(x) = -\frac{2\pi}{\ell} \operatorname{sen} \frac{2\pi x}{\ell}$$

$$\ddot{\psi}_2(x) = -\frac{4\pi^2}{\ell^2} \cos \frac{2\pi x}{\ell}$$

Ambas as funções são deriváveis duas vezes (problema de 4ª ordem) e como não temos condições de fronteira geométricas, então também já são respeitadas. Assim sendo, ambas as funções são admissíveis no método de Rayleigh.

A função mais adequada para estimar a frequência natural fundamental do sistema pelo método de Rayleigh é a função ψ_1, pois tem apenas 1 nodo.

c) Energia potencial:

$$V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} G I_p \left(\frac{\partial \theta(x)}{\partial x} \right)^2 dx + V_{cfm}$$

$$= \frac{1}{2} G I_p \int_0^{\ell} \left(-\frac{\pi}{\ell} \operatorname{sen} \left(\frac{\pi x}{\ell} \right) \right)^2 dx =$$

$$= \frac{1}{2} G I_p \times \frac{\pi^2}{2\ell}$$

Energia cinética:

$$T_{máx} = \omega^2 \left(\frac{1}{2} \int_0^{\ell} J(x) \left(\theta(x) \right)^2 dx + T^*_{cfm} \right)$$

$$= \omega^2 \left(\frac{1}{2} J(x) \int_0^{\ell} \left(\cos \frac{\pi x}{\ell} \right)^2 dx + \frac{1}{2} J_1 [\theta(0)]^2 + \frac{1}{2} J_2 [\theta(\ell)]^2 \right) =$$

$$= \omega^2 \left(\frac{1}{2} J(x) \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} J_1 + \frac{1}{2} J_2 \right)$$

Agora:

$$R(v(x)) = \omega^2 = \frac{V_{máx}}{T^*}$$