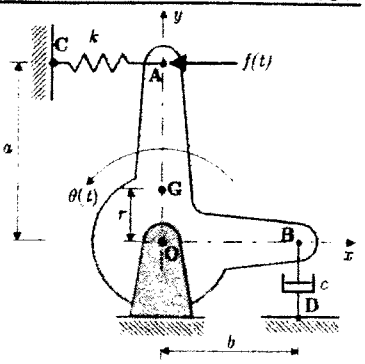
1) (4 val.) A peça em forma de **L** representada na figura possui uma massa m, centro de massa no ponto **G** e oscila em torno do ponto **O**. A peça está ligada ao exterior através de uma mola linear de rigidez k no ponto **A** e através de um amortecedor viscoso de coeficiente c no ponto **B**. O momento de inércia da peça em relação a um eixo que passa por **O**, perpendicular ao plano Oxy, é J. No ponto **A** está aplicada uma solicitação $f(t)$ na direcção horizontal.



Considerando que na posição de equilíbrio estático o eixo **OA** está na vertical, determinar:

a) (20%) A equação diferencial (linearizada) de movimento do sistema.

Para a aplicação numérica,

$k = 2600$ N/m $\quad c = 30$ Ns/m $\quad m = 0.5$ kg $\quad J = 0.1$ kgm^2

$a = 0.15$ m $\quad b = 0.12$ m $\quad r = 0.05$ m

determinar:

b) (10%) a razão de amortecimento;

c) (10%) a frequência natural amortecida e o respectivo período.

Para uma perturbação inicial $\theta_0 = 10^o$ e $\dot{\theta}_0 = 12$ rad/s, determinar,

d) (15%) a energia introduzida no sistema;

e) (15%) a expressão da resposta $\theta(t)$ do sistema. Apresentar um esboço gráfico.

Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ com uma amplitude de 30 N e uma frequência de 6 Hz, determinar:

f) (15%) a resposta estacionária do sistema;

g) (15%) a frequência de ressonância e a amplitude máxima da força transmitida ao apoio **D**.

Quantidade de aceleração no ponto G:

$$\vec{Q}_G = m \times \vec{a}_G = m \times \begin{Bmatrix} -\lambda\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -m\lambda\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equação diferencial do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times (\vec{F}_k + \vec{f}(t)) + \vec{OG} \times m\vec{g} + \vec{OB} \times \vec{F}_c = \vec{K}_O \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Ka\theta - f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\lambda\theta \\ \lambda \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad -Ka^2\theta + f(t)\,a + \lambda mg\theta - cb^2\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad J\ddot{\theta}(t) + cb^2\dot{\theta}(t) + (Ka^2 - \lambda mg)\,\theta(t) = a\,f(t)$$

b) Para os valores do enunciado, temos:

$$0{,}1\,\ddot{\theta}(t) + 0{,}432\,\dot{\theta}(t) + 58{,}255\,\theta(t) = 0{,}15\,f(t)$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\,m_{eq}\,\omega_n} = \frac{c_{eq}}{2\,m_{eq}\sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}432}{2 \times 0{,}1 \times \sqrt{\frac{58{,}255}{0{,}1}}} = 0{,}089493$$

c) Frequência natural amortecida, ω_d:

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = \sqrt{\frac{58{,}255}{0{,}1}} \times \sqrt{1 - 0{,}089493^2} = 24{,}039225$$

$\omega_n = 24{,}136093$

Período natural amortecido, T_d:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{24{,}039225} = 0{,}261372\ \lambda$$

d) Para a perturbação inicial. $\theta_0 = 10^\circ = \frac{10 \times \pi}{180} = 0{,}174533$ rad

$\dot{\theta}_0 = 12$ rad/s

Energia cinética inicial: $E_c = \frac{1}{2} \times J \times \dot{\theta}_0^2 =$

$= \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 12^2 =$

$= 7{,}2$ J

Energia potencial inicial: $E_p = \frac{1}{2} \times k_{eq} \times \theta_0^2 =$

$= \frac{1}{2} \times 58{,}255 \times 0{,}174533^2 =$

$= 0{,}887275$ J

Então a energia introduzida no sistema foi de:

$$E_0 = E_{c_0} + E_{p_0} = 7{,}2 + 0{,}887275 = 8{,}087275 \text{ J}$$

e) A resposta $\theta(t)$ do sistema é do tipo:

$$\theta(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

Para tal é necessário calcular as constantes:

$$A_1 = \theta_0 = 0{,}174533 \text{ rad}$$

$$A_2 = \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_d} = \frac{12 + 0{,}089493 \times 24{,}136073 \times 0{,}174533}{24{,}039225} = 0{,}514867$$

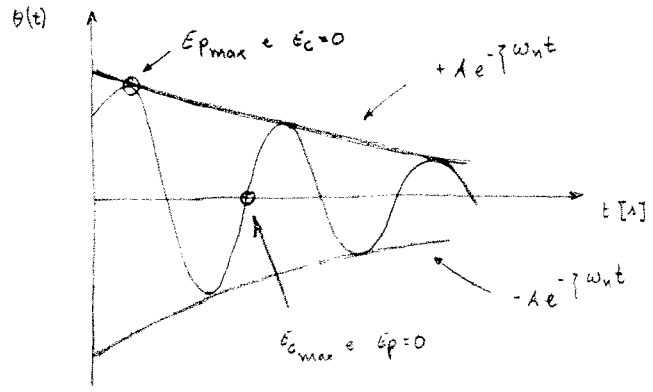
$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} = \sqrt{0{,}174533^2 + 0{,}514867^2} = 0{,}543645$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1} = \tan^{-1} \frac{0{,}514867}{0{,}174533} = 1{,}243967$$

Temos então:

$$\theta(t) = 0{,}543645\, e^{-2{,}16\, t} \cos(24{,}039225\, t - 1{,}243967)$$

Graficamente, temos:



A energia total introduzida no sistema é então:

$$E_{TOTAL} = T + V =$$

$$= 7,2 + 5,08362 =$$

$$= 12,28362 \text{ J}$$

e) A expressão da resposta $\theta(t)$ do sistema é dada por:

$$\theta(t) = A e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

Onde:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2 + \theta_0^2} = \sqrt{\left(\frac{12 + 0,08949 \times 24,13607 \times 0,17453}{24,13607 \times \sqrt{1 - 0,08949^2}}\right)^2 + 0,17453^2}$$

$$= 0,54364 \text{ rad}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}\, \theta_0} = \tan^{-1} \frac{12 + 0,08949 \times 24,13607 \times 0,17453}{24,13607 \times \sqrt{1 - 0,08949^2} \times 0,17453} =$$

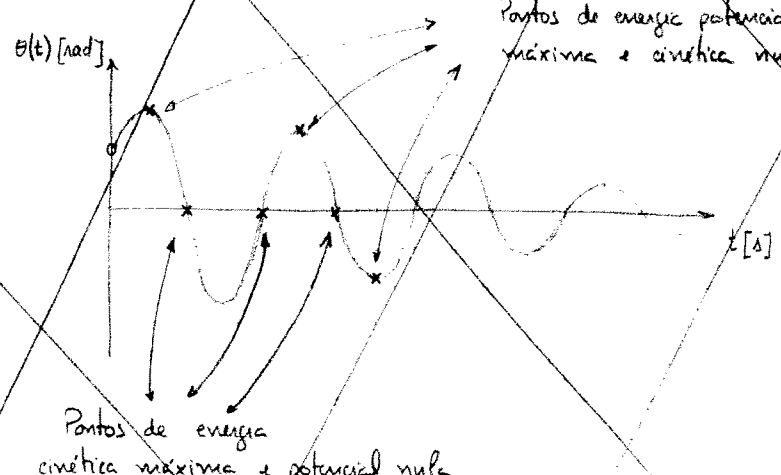
$$= 1,24397 \text{ rad}$$

Temos então:

$$\theta(t) = 0,54364\, e^{-0,08949 \times 24,13607 \times t} \cos(24,03923\, t - 1,24397) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = 0,54364\, e^{-2,15994\, t} \cos(24,03923\, t - 1,24397)$$

Graficamente, temos:



f) Considerando a solicitação harmónica: $f(t) = F \cos \omega t$; $F = 30N$; $f = 6\ Hz$

A frequência de excitação é: $\omega = 2\pi \times f \Leftrightarrow \omega = 12\pi$

A equação do movimento vem então:

$$0{,}1\ \ddot{\theta}(t) + 0{,}432\ \dot{\theta}(t) + 58{,}255\ \theta(t) = 0{,}15 \times 30 \times \cos(12\pi t) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0{,}1\ \ddot{\theta}(t) + 0{,}432\ \dot{\theta}(t) + 58{,}255\ \theta(t) = 4{,}5 \cos(12\pi t)$$

Resposta permanente $\theta_p(t)$ é dada por:

$$\theta_p(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

Onde:

$$\Theta(\omega) = \frac{\frac{F_{eq}}{K_{eq}}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore \quad \Theta(\omega) = \frac{\frac{4{,}5}{58{,}255}}{\sqrt{(1-1{,}56194^2)^2 + (2 \times 0{,}08949 \times 1{,}56194)^2}} = 0{,}05267\ rad$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{12\pi}{24{,}13607} = 1{,}56194$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} \quad \therefore \quad \phi = \frac{2 \times 0{,}08949 \times 1{,}56194}{(1-1{,}56194^2)} = 0{,}88530\ rad$$

Temos então:

$$\theta_p(t) = 0{,}05267 \cos(12\pi t - 0{,}88530)$$ //

g) Deslocamento estático:

$$\theta_s = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad \therefore \quad \theta_s = \frac{4{,}5}{58{,}255} = 0{,}07725$$

Factor de amplificação dinâmica máximo:

$$\mu_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \mu_{max} = \frac{1}{2 \times 0{,}08949 \times \sqrt{1-0{,}08949^2}} = 5{,}60972$$

O máximo de amplitude de resposta é:

$$\mu_{max} = \frac{\Theta(\omega)}{\theta_s} \Leftrightarrow \Theta(\omega) = \mu_{max} \times \theta_s \quad \therefore \quad \Theta(\omega) = 5{,}60972 \times 0{,}07725 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = 0{,}43335\ rad$$

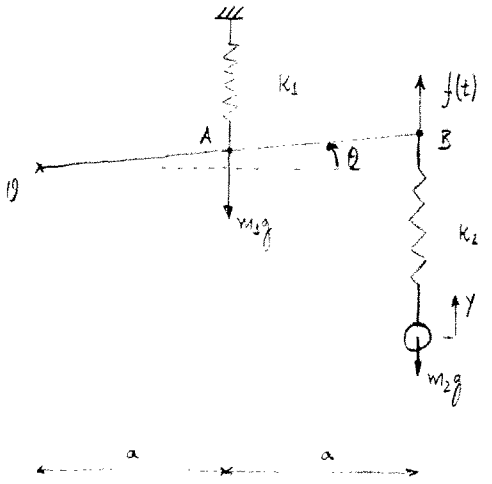
Frequência de ressonância (ocorre para o máximo do factor de amplificação dinâmica):

$$\omega_r = \omega_n \times \sqrt{1-2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 24{,}13607 \times \sqrt{1-2 \times 0{,}08949^2} = 23{,}94120\ rad/s$$

Exame de Época Especial de 30-11-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Quando perturbamos o sistema temos:



As coordenadas generalizadas são: $q_1 = \theta \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{\theta}$; $q_2 = y \Rightarrow \dot{q}_2 = \dot{y}$

Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} \times J_1 \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{y}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{12} \times m_1 \times 4a^2 + m_1 \times a^2 \right] \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{y}^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times \left[\frac{4}{3} \times m_1 \times a^2 \right] \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{y}^2 =$$

$$= \frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2$$

Energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} \times K_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times K_2 \times x_2^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times K_1 \times (a \operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2} \times K_2 \times (y - 2a \operatorname{sen}\theta)^2$$

$$= \frac{1}{2} \times K_1 \times a^2 \times \theta^2 + \frac{1}{2} \times K_2 \times (y - 2a\theta)^2$$

Forças não-conservativas:

$$Q_1 = f(t) \times \frac{\partial}{\partial \theta} (2a \operatorname{sen}\theta) + 0 = f(t) \times 2a \cos\theta = f(t) \times 2a$$

$$Q_2 = f(t) \times \frac{\partial}{\partial y} (2a \operatorname{sen}\theta) + 0 = f(t) \times 0 = 0$$

Equações de Lagrange:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} + \dfrac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} + \dfrac{\partial V}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases}$$

Onde:

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2\right) = \frac{4}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{4}{3} m_1 a^2 \ddot{\theta}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_1} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{1}{2} k_1 a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 (y - 2a\theta)^2\right) = k_1 a^2 \theta + k_2 (y - 2a\theta) \times (-2a) =$$

$$= k_1 a^2 \theta - 2k_2 a (y - 2a\theta)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} = \frac{d}{d\dot{y}}\left(\frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2\right) = m_2 \dot{y}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}}\right) = m_2 \ddot{y}$$

$$\frac{\partial T}{\partial q_2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{2}{3} m_1 a^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{y}^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = \frac{d}{dy}\left(\frac{1}{2} k_1 a^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 (y - 2a\theta)^2\right) = k_2 (y - 2a\theta)$$

Que resulta nas seguintes equações diferenciais do movimento:

$$\begin{cases} \dfrac{4}{3} m_1 a^2 \ddot{\theta} + k_1 a^2 \theta - 2k_2 a (y - 2a\theta) = f(t) \cdot 2a \\ m_2 \ddot{y} + k_2 (y - 2a\theta) = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} m_1 a^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 a^2 + 4 k_2 a^2 & -2k_2 a \\ -2k_2 a & k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \cdot 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) As equações do movimento são:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 6m \times 0,5^2 & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10K \times 0,5^2 + 4 \times 2K \times 0,5^2 & -2 \times 2K \times 0,5 \\ -2 \times 2K \times 0,5 & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} f(t) \times 2 \times 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4,5K & -2K \\ -2K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ y(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequências naturais de vibração:

$$\begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ Y(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 4,5K - \omega^2 \times 6m & -2K \\ -2K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ Y(\omega) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 4,5K - \omega^2 \times 6m & -2k \\ -2k & 2k - \omega^2 \times m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 0,5889 \sqrt{\frac{k}{m}} \wedge \omega_2 = 1,5502 \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [rad/s]$$

Formas naturais de vibração:

1ª Forma natural: $-2 \times k \times \Theta(\omega) + (2 \times K - \omega_1^2 \times m) \times Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2k\,\Theta(\omega) + \left(2k - 0,3469 \frac{k}{m} \times m\right) \times Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = \frac{-(2k - 0,3469k)}{-2k} Y(\omega) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = 0,8266\, Y(\omega) \Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,8266 \\ 1 \end{Bmatrix}$

2ª Forma natural: $-2 \times K \times \Theta(\omega) + (2 \times K - \omega_2^2 \times m) \times Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2k\,\Theta(\omega) + \left(2k - 2,4032 \frac{k}{m} \times m\right) \times Y(\omega) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = \frac{-(2K - 2,4032K)}{-2k} Y(\omega) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Theta(\omega) = -0,2016\, Y(\omega) \Rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -0,2016 \\ 1 \end{Bmatrix}$

c) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T \times [m] \times \{u\}_1}} \{u\}_1 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\begin{bmatrix} 0,8266 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 0,5^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0,8266 \\ 1 \end{Bmatrix}}} \times \begin{Bmatrix} 0,8266 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0,3949 \\ 0,4777 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_2^T \times [m] \times \{u\}_2}} \{u\}_2 =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\begin{bmatrix} -0,2016 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 6 \times 1 \times 0,5^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -0,2016 \\ 1 \end{Bmatrix}}} \times \begin{Bmatrix} -0,2016 \\ 1 \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{Bmatrix} -0,1953 \\ 0,9690 \end{Bmatrix}$$

As equações de movimento do sistema na base modal é:

$$[I] \{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2] \{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 94,224 & 0 \\ 0 & 248,032 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,3949 & -0,1953 \\ 0,4777 & 0,9690 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 94,224\ \eta_1(t) \\ 248,032\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,3949\ f(t) \\ -0,1953\ f(t) \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 94,224\ \eta_1(t) = 0,3949\ f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 248,032\ \eta_2(t) = -0,1953\ f(t) \end{cases} //$$