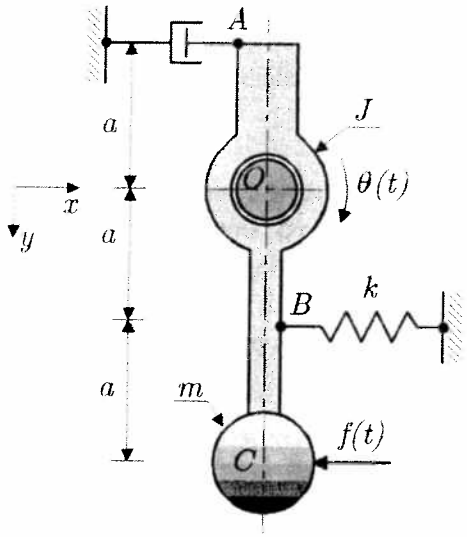


1) (6 val.) A barra representada na figura oscila em torno do ponto **O**. A barra está ligada ao exterior através de um amortecedor viscoso de coeficiente c no ponto **A** e por uma mola de rigidez k no ponto **B**. O momento de inérica da barra em relação a um eixo que passa por **O**, perpendicular ao plano Oxy, é J. Uma massa concentrada m encontra-se rigidamente ligada à barra no ponto **C**, ponto em que é também aplicada uma solicitação horizontal $f(t)$. Na posição de equilíbrio estático a barra está na vertical, a mola não se encontra deformada e $\theta(t) = 0$.

a) (25%) Determinar a equação diferencial (linearizada) de movimento do sistema.

Na resolução das alíneas seguintes considerar a equação diferencial de movimento,

$0.65\ddot{\theta}(t) + 0.5\dot{\theta}(t) + 120\theta(t) = 0.2f(t)$ e $k = 10$ kN/m e $a = 0.1$ m.

Determinar:

b) (10%) a razão de amortecimento;

c) (10%) a frequência angular amortecida e o respectivo período.

Para uma perturbação inicial $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 5$ rad/s, determinar:

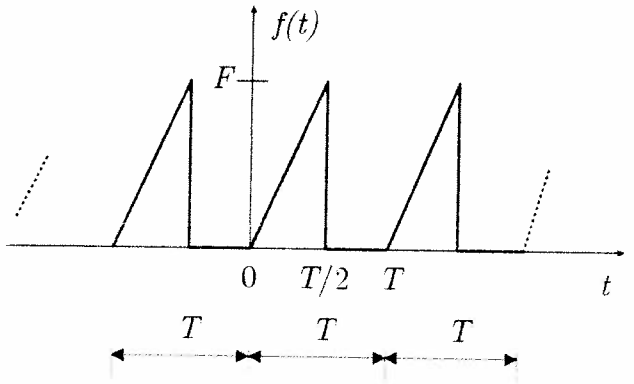
d) (15%) a energia potencial elástica máxima atingida pelo sistema.

Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ com amplitude $F = 10$ N, determinar:

e) (10%) a frequência de ressonância de amplitude de deslocamento e a amplitude máxima de resposta no ponto **A**.

f) (15%) Para a mesma solicitação harmónica, mas no caso particular em que $\omega = 10$ rad/s, determinar a resposta estacionária do sistema;

g) (15%) Para uma força periódica com período $T = 0.5\ s$ e $F = 10$ N, conforme representada na figura, determinar uma estimativa para o deslocamento angular da barra.



Nota:

$$\int x\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{\sin(ax)}{a^2} - \frac{x\cos(ax)}{a} \qquad \int x\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\cos(ax)}{a^2} + \frac{x\sin(ax)}{a}$$

$$\int x^2\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(-a^2x^2\cos(ax) + 2\cos(ax) + 2ax\sin(ax)\right)$$

$$\int x^2\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{1}{a^3}\left(a^2x^2\sin(ax) - 2\sin(ax) + 2ax\cos(ax)\right)$$

3) (6 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por:

- corpo 1, disco de raio r e massa m que rola sem escorregar sobre uma superfície e que se encontra ligado ao corpo 2 no ponto C ($J_C = \frac{1}{2}mr^2$);
- corpo 2, barra de massa desprezável e de comprimento $2r$ articulada com o disco e o corpo 3 em B;
- corpo 3, barra de massa desprezável e de comprimento $2r$ que roda em torno do ponto fixo O, articulada com o corpo 2 e ligada a um conjunto mola-amortecedor de constantes k e c, respectivamente, e submetido a uma excitação passiva $s(t)$.

Na situação de equilíbrio estático, $\theta(t) = 0$ rad e $s(t) = 0$ m, e as oscilações angulares podem considerar-se 'pequenas'.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial (linearizada) de movimento.

Para resolver as alíneas seguintes, considerar a equação de movimento:

$$3.75\ddot{\theta}(t) + 162.5\dot{\theta}(t) + 3.75 \times 10^4\theta(t) = 1.578 \times 10^5 s(t) \text{ e } r = 0.25 \text{ m}.$$

Para uma excitação passiva harmónica, $s(t) = S\cos\omega t$ de amplitude igual a 10 mm e frequência de 12 Hz, determinar,

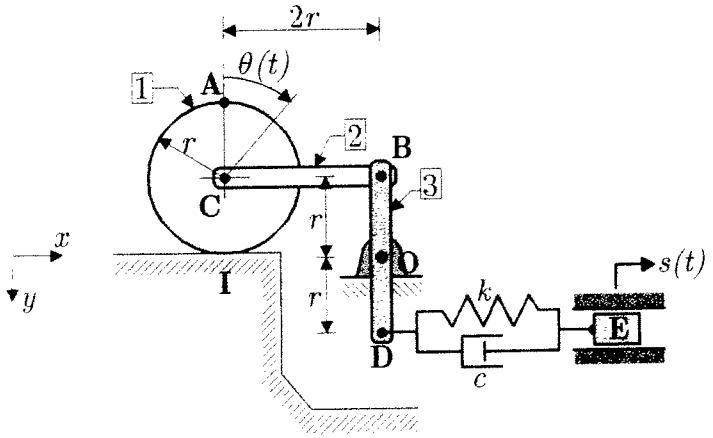
b) (15%) a amplitude de deslocamento $X_A(\omega)$ do ponto A do disco;

c) (15%) a amplitude F_T da força transmitida $f_T(t)$ no ponto B;

d) (15%) a amplitude da elongação da mola;

e) (15%) Num determinado instante do regime estacionário em que o disco atinge a posição de referência $\theta = 0$, (com valores decrescentes de θ, $\theta^+ \rightarrow \theta = 0$), é desligada a excitação, $s(t) = 0$. Determinar a expressão do movimento subsequente do sistema.

f) (15%) Para $c = 0$, redimensionar a constante de rigidez k de modo a manter a amplitude $X_A(\omega)$ do ponto A. Esboçar graficamente $X_A(\omega)$ e representar os pontos de funcionamento.

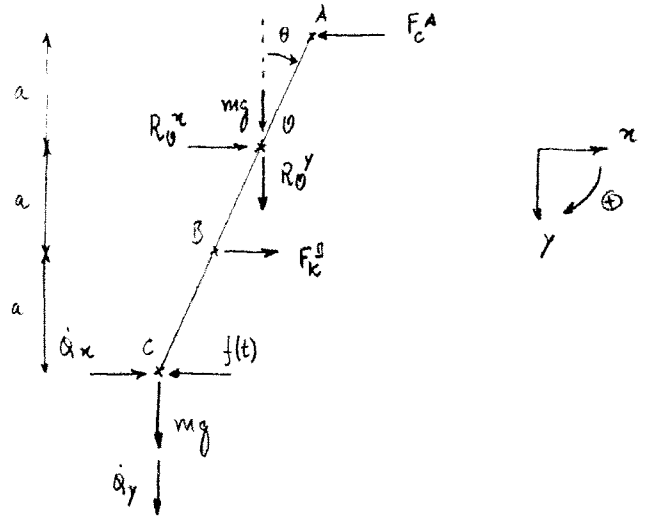


FEUP, 21.04.2010
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

Exame de 1ª Prova de Avaliação de 21-04-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

Quando perturbamos o sistema temos:



a) No ponto A:

$$\vec{v}_A = \begin{Bmatrix} a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_A = \begin{Bmatrix} a\theta \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_A = \dot{\vec{v}}_A = \begin{Bmatrix} a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_c^A = -c \times \vec{v}_A = -c \times \begin{Bmatrix} a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -ca\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto B:

$$\vec{v}_B = \begin{Bmatrix} -a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_B = \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_K^B = -K \times \Delta\vec{v}_B = -K\left[\begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ a \\ 0 \end{Bmatrix}\right] = \begin{Bmatrix} Ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

No ponto C:

$$\vec{v}_C = \begin{Bmatrix} -2a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 2a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{v}_C = \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{v}_C = \dot{\vec{v}}_C = \begin{Bmatrix} -2a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{Q}_C = m \times \vec{a}_C = m \times \dot{\vec{v}}_C = m \times \begin{Bmatrix} -2a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O: $= 0$, porque é uma massa concentrada

$$\vec{K}_O = \vec{K}_O^{barra} + \vec{K}_O^{massa} = \vec{K}_O^{barra} + \cancel{\vec{K}_C^{massa}} + \vec{OC} \times \vec{Q}_C =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -2am\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\ddot{\theta} + 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times \vec{F}_C^A + \vec{OB} \times \vec{F}_K^B + \vec{OC} \times m\vec{g} + \vec{OC} \times \vec{F}(t) = \vec{K}_O \therefore$$

$$\therefore \begin{Bmatrix} a\theta \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} -ca\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} Ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -2a\theta \\ 2a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ mg \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_{barra}\ddot{\theta} + 4a^2m\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ca^2\dot{\theta} - Ka^2\theta - 2a\theta mg + 2a f(t) = (J_{barra} + 4a^2m)\ddot{\theta} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (J_{barra} + 4a^2m)\ddot{\theta} + ca^2\dot{\theta} + (Ka^2 + 2amg)\theta = 2a f(t)$$

Temos finalmente:

$$(J_{barra} + 4a^2m)\ddot{\theta}(t) + ca^2\dot{\theta}(t) + (Ka^2 + 2amg)\theta(t) = 2c f(t)$$

b) A equação do movimento é:

$$0{,}65\,\ddot{\theta}(t) + 0{,}5\,\dot{\theta}(t) + 120\,\theta(t) = 0{,}2\,f(t)$$

Razão de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}5}{2 \times 0{,}65 \times 13{,}58732} = 0{,}02831$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{120}{0{,}65}} = 13{,}58732 \ rad/s$$

c) Frequência angular amortecida:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 13{,}58732 \times \sqrt{1 - 0{,}02831^2} = 13{,}58187 \ rad/s$$

Período natural amortecido:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{13{,}58187} = 0{,}46262 \ s$$

d) A energia potencial elástica máxima é dada por:

$$V_{máx} = \frac{1}{2} \times K_{eq} \times \theta_{max}^2$$

O instante em que o θ é máximo é dado por:

$$t\big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{\omega_d}\left(\tan^{-1}\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) + (n-1)\pi + \phi\right), \quad n = 1$$

Considerando que os valores de $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 5$ rad/s, então a constante ϕ é:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,\theta_0} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1}\frac{5+0}{0} \quad (=) \quad \phi = \pm\frac{\pi}{2}$$

E a constante A é dada por:

$$A = \sqrt{\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}\right)^2 + \theta_0^2} \quad \therefore$$

$$\therefore A = \sqrt{\left(\frac{5+0}{13,58732\sqrt{1-0,02831^2}}\right)^2 + 0^2} \quad (=) \quad A = 0,36814$$

Então, o instante de θ_{max} é:

$$t\big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{13,58187}\left(\tan^{-1}\left(-\frac{0,02831}{\sqrt{1-0,02831^2}}\right) + (1-1)\pi + \pi/2\right) =$$

$$= 0,11357 \text{ s}$$

E o valor de θ_{max} é:

$$\theta_{max} = A \times e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t - \phi) \quad \therefore$$

$$\therefore \theta_{máx} = 0,36814 \times e^{-0,02831 \times 13,58732 \times 0,11357} \times \cos(13,58732 \times 0,11357 - \pi/2) (=)$$

$$(=) \quad \theta_{máx} = 0,35227 \text{ rad}$$

Deste modo, a energia potencial elástica máxima é dada por:

$$V_{max} = \frac{1}{2} \times 120 \times 0,35227^2 = 7,44565 \text{ J}$$

e) Para a solicitação harmónica: $f(t) = F \cos \omega t$ e $F = 10\,N$

Frequência de ressonância:

$$\omega_r = \omega_n \times \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 13{,}58732 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}02831^2} = 13{,}57643 \text{ rad/s}$$

Deslocamento estático:

$$\theta_s = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad \therefore \quad \theta_s = \frac{0{,}2 \times 10}{120} = 0{,}01667 \text{ rad}$$

Factor de amplificação dinâmica máximo:

$$\mu_{max} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \mu_{máx} = \frac{1}{2 \times 0{,}02831 \times \sqrt{1 - 0{,}02831^2}} = 17{,}66869$$

A amplitude máxima é:

$$\theta(\omega) = \mu_{max} \times \theta_s \quad \therefore \quad \theta(\omega) = 17{,}66869 \times 0{,}01667 = 0{,}29454 \text{ rad}$$

Deste modo, a amplitude máxima no ponto A é:

$$\theta_A(\omega) = \overline{OA} \times \theta(\omega) \quad (=) \quad \theta_A(\omega) = a \times \theta(\omega)$$

$$\therefore \quad \theta_A(\omega) = 0{,}1 \times 0{,}29454 \quad (=)$$

$$(=) \quad \theta_A(\omega) = 0{,}02945$$

f) Para o caso particular: $\omega = 10$ rad/s

Razão de frequência: $\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{10}{13{,}58732} = 0{,}73598$

A resposta estacionária do sistema é:

$$\theta_p(t) = \theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

Onde a amplitude $\theta(\omega)$ e o desfazamento ϕ são:

$$\theta(\omega) = \frac{F_{eq}/K_{eq}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore \quad \theta(\omega) = \frac{\frac{0{,}2 \times 10}{120}}{\sqrt{(1 - 0{,}73598^2)^2 + (2 \times 0{,}02831 \times 0{,}73598)^2}} \quad (=)$$

$$(=) \quad \theta(\omega) = 0{,}03621 \text{ rad}$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0{,}02831 \times 0{,}73598}{(1 - 0{,}73598^2)} = 0{,}09067 \text{ rad}$$

A resposta estacionária é então:

$$\theta_p(t) = 0{,}03621 \times \cos(10t - 0{,}09067)$$

g) Período: $T = 0{,}5\,s$

Amplitude da força: $F = 10\,N$

Frequência de excitação, ω:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \therefore \quad 0{,}5 = \frac{2\pi}{\omega} \quad (\Leftrightarrow) \quad \omega = 12{,}566371 \ rad/s$$

$$\omega_n \simeq n \times \omega \quad (\Leftrightarrow) \quad \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \simeq n\omega \quad \therefore \quad \sqrt{\frac{120}{0{,}65}} \simeq n \times 12{,}566371 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad 13{,}587224 \simeq n \times 12{,}566371 \quad \Rightarrow \quad n = 1$$

A força aplicada é:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{F}{T/2}\, t = \frac{2F}{T}\, t = \frac{2 \times 10}{0{,}5}\, t = 40t \ , & 0 \leq t < T/2 \\ 0 \ , & T/2 \leq t < T \end{cases}$$

Os coeficientes de Fourier são:

$$A_0 = \frac{2}{0{,}5} \int_0^{0{,}25} 40\, t\, dt = 5$$

$$A_1 = \frac{2}{0{,}5} \int_0^{0{,}25} 40t \cos\left(1 \times \frac{2\pi}{0{,}5} \times t\right) dt = -2{,}026424$$

$$B_1 = \frac{2}{0{,}5} \int_0^{0{,}25} 40t \sin\left(1 \times \frac{2\pi}{0{,}5} \times t\right) dt = 3{,}183099$$

$$F_1 = \sqrt{A_1^2 + B_1^2} = \sqrt{-2{,}026424^2 + 3{,}183099^2} = 3{,}773395$$

$$\psi_1 = \tan^{-1}\frac{B_1}{A_1} = \tan^{-1}\frac{3{,}183099}{-2{,}026424} = -1{,}003885$$

A solicitação periódica $f(t)$ quando expressa em série de Fourier fica:

$$f(t) = \frac{5}{2} + 3{,}773395 \cos\left(\frac{2\pi}{0{,}5}\, t + 1{,}003885\right)$$

Como estámos a aproximar a série apenas para o harmónico de ordem 1, então a resposta vem:

$$\theta(t) = \frac{A_0}{2k} + \Theta_1(\omega)\cos(\omega t - \psi_1 - \phi_1) =$$

$$= \frac{5}{2\times120} + \frac{3,773395}{120} \frac{1}{\left[\left(1-0,924860^2\right)^2 + \left(2\times0,028307\times0,924860\right)^2\right]^{1/2}} \times$$

$$\times \cos\left(\frac{2\pi}{0,5}t + 1,003885 - 0,347340\right) =$$

$$= 0,28526\cos\left(\frac{2\pi}{0,5}t + 0,656545\right)$$

Onde:

$$\beta_1 = 1\times\frac{\omega}{\omega_n} = \frac{12,586331}{13,587324} = 0,924860$$

$$\gamma = \frac{c_{eq}}{2\,m_{eq}\,\omega_n} = \frac{0,5}{2\times0,65\times13,587324} = 0,028307$$

$$\phi_1 = \tan^{-1}\frac{2\gamma\beta_1}{1-\beta_1^2} = \tan^{-1}\frac{2\times0,028307\times0,924860}{1-0,924860^2} = 0,347340$$