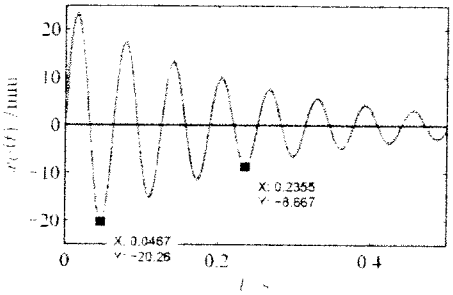


1) (4 val.) 1) O disco, de raio $r = 0.1$ m e massa m ($J_C = \frac{1}{2}mr^2$) representado na figura, rola sem escorregar sobre uma superfície plana. O disco encontra-se ligado a um conjunto mola-amortecedor de constantes k e c, respectivamente, e submetido a uma excitação passiva $s(t)$. Para $\theta(t) = 0$ e $s(t) = 0$, a mola não está deformada.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento do sistema;

✓b) (15%) Num ensaio em regime livre, $s(t) = 0$, o deslocamento linear do ponto **C** está representado na figura. Determinar a razão de amortecimento e a frequência natural não amortecida;



Para resolver as alíneas seguintes, considerar a equação do movimento:

$$0.6\ddot{\theta}(t) + 5.4\dot{\theta}(t) + 6000\,\theta(t) = 5.4\dot{s}(t) + 6000\,s(t)$$

sendo a excitação passiva harmónica $s(t) = S\cos(\omega t)$, com amplitude igual a 5 mm e frequência igual a 90 rad/s.

Determinar:

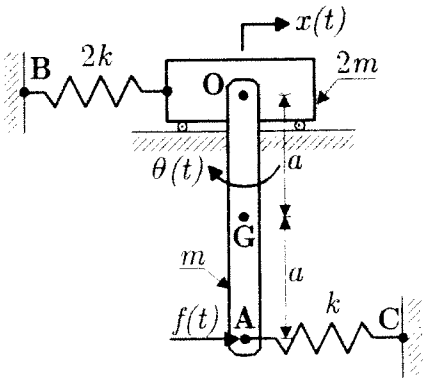
✓c) (15%) a amplitude do deslocamento $X_C(\omega)$ do ponto **C** do disco;

d) (20%) a amplitude F_T da força transmitida ao disco no ponto **C**;

✓e) (10%) A frequência de ressonância e a correspondente amplitude do ponto **C**;

f) (15%) para c=0, estabelecer a gama de frequências de excitação para as quais a amplitude $X_C(\omega)$ do deslocamento do ponto **C** não ultrapassa o valor calculado na alínea c).

v.s.f.f.



2)(4 val.) O sistema com dois graus de liberdade - $x(t)$ e $\theta(t)$ - representado na figura é constituído por um bloco de massa $2m$ e uma barra de massa m e comprimento $2a$ ($J_G = \frac{1}{12}m(2a)^2$). O bloco encontra-se ligado ao exterior através de uma mola de rigidez $2k$. A barra roda relativamente ao bloco em torno do ponto **O** e está ligada ao exterior no ponto **A** através de uma mola de rigidez k.

Para $\theta(t) = 0$ rad e $x(t) = 0$ m, as molas não estão deformadas.

a) (35%) Escrever as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes admitir que as equações de movimento do sistema são:

$$\begin{bmatrix} 60 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 15000 & -10000 \\ -10000 & 10000 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 2f(t) \end{Bmatrix}$$

b) (25%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Escrever as equações de movimento na base modal, com os vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

d) (25%) Determinar uma estimativa para o valor máximo da resposta $x(t)$ à excitação transiente do tipo meia onda seno:

$$f(t) = \begin{cases} 10\sin\left(\frac{\pi}{0.4}t\right) & 0 < t \le 0.4\text{s} \\ 0 & t > 0.4\text{s} \end{cases}$$

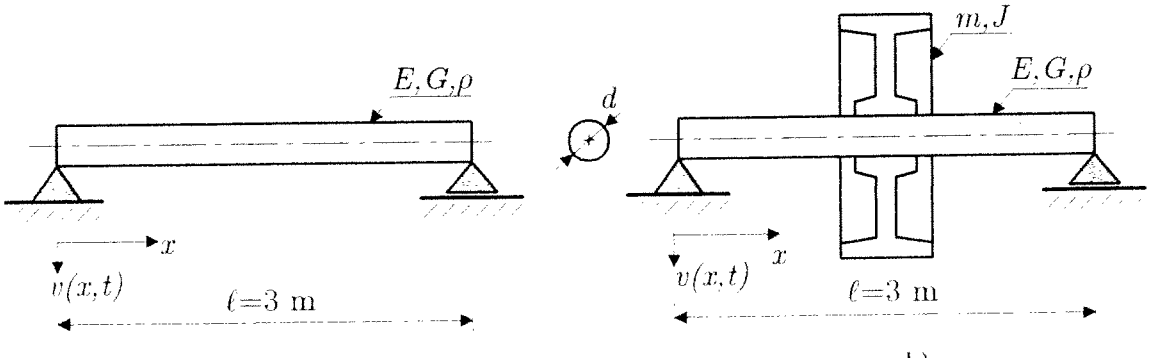
3) (4 val.) A figura a) representa um veio de comprimento $\ell = 3$ m e simplesmente apoiado para a flexão e livre-livre para a torção. O material do veio (aço) apresenta um módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa e transversal $G = 80$ GPa, e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. A secção recta do veio é circular de diâmetro d.

a) (30%) Dimensionar a secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja igual a 25 Hz.

Se, a meio vão do veio for montado um volante de massa $m = 680$ kg e momento polar de inércia $J = 263$ kgm^2, conforme se representa na figura b),

b) (40%) determinar uma estimativa da nova frequência natural fundamental de flexão do sistema veio-volante;

c) (30%) determinar a frequência natural de torção do sistema veio-volante.

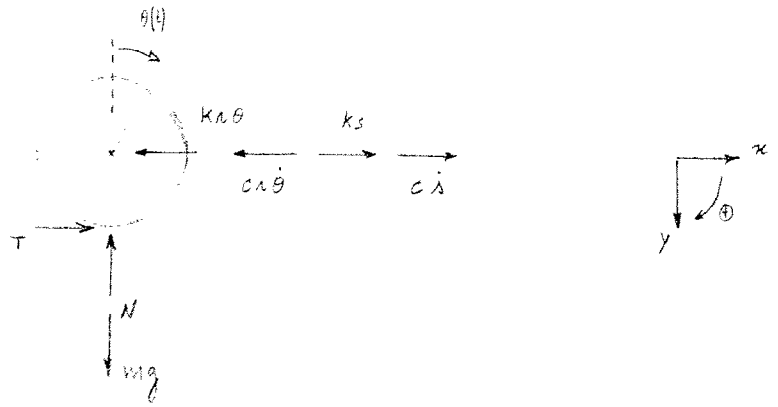


Exame de Recurso de 22-07-2010
Vibrações e Ruído

Estudo para fim de curso

Exercício 1

a) Diagrama de corpo livre:



Equação do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_I = \vec{K}_I \quad \therefore$$

$$\therefore -\lambda \times \left(K\lambda\theta + c\lambda\dot{\theta} \right) + \lambda \left(Ks + c\dot{s} \right) = \overset{Steiner}{J_I} \times \ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \; -K\lambda^2\theta - c\lambda^2\dot{\theta} + \lambda Ks + \lambda c\dot{s} = \left(\tfrac{1}{2} \times m \times \lambda^2 + m \times \lambda^2 \right) \ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=) \; \tfrac{3}{2} m\lambda^2 \ddot{\theta}(t) + c\lambda^2 \dot{\theta}(t) + K\lambda^2 \theta(t) = K\lambda s + c\lambda\dot{s}$$

b) Decremento logarítmico, δ:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{x(t_1)}{x(t_2)} \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{3} \ln \frac{-20,26}{-8,669} = 0,283042$$

Rácio de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{\delta^2}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0,283042^2}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0,283042^2}} = 0,045002$$

Período natural amortecido, T_d:

$$T_d = \frac{t_2 - t_1}{N} \quad \therefore \quad T_d = \frac{0,2355 - 0,0467}{3} = 0,062933 \; s$$

Frequência natural amortecida, ω_d:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{2\pi}{0,062933} = 99,839278 \text{ rad/s}$$

Frequência natural não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \omega_n = \frac{99,839278}{\sqrt{1-0,045002^2}} = 99,940528 \text{ rad/s}$$

c) Equação do movimento:

$$0,6\ \ddot{\theta}(t) + 5,4\ \dot{\theta}(t) + 6000\ \theta(t) = 5,4\ \dot{s}(t) + 6000\ s(t)$$

Excitação passiva harmônica:

$$s(t) = S \cos(\omega t) \quad , \quad S = 5 \text{ mm} \quad \text{e} \quad \omega = 90 \text{ rad/s}$$

$$\dot{s}(t) = -S\omega \operatorname{sen}(\omega t)$$

Então, a equação do movimento fica:

$$0,6\ \ddot{\theta}(t) + 5,4\ \dot{\theta}(t) + 6000\ \theta(t) = 5,4 \times (-0,005 \times 90 \times \operatorname{sen}(\omega t) + 6000 \times (0,005 \cos \omega t) \quad (=)$$

$$(=)\ 0,6\ \ddot{\theta}(t) + 5,4\ \dot{\theta}(t) + 6000\ \theta(t) = 0,005 \times \sqrt{6000^2 + (90 \times 5,4)^2} \cos(\omega t + \gamma) \quad (=)$$

$$(=)\ 0,6\ \ddot{\theta}(t) + 5,4\ \dot{\theta}(t) + 6000\ \theta(t) = 30,098254 \cos(\omega t + \gamma)$$

Resposta estacionária ou permanente do sistema:

$$\theta(t) = \textcircled{H}(\omega) \times \cos(\omega t + \gamma - \phi) \quad (=)$$

$$(=)\ \theta(t) = Y \times TR_{abs} \times \cos(\omega t + \gamma - \phi) =$$

$$(=)\ \theta(t) = Y \times \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \cos(\omega t + \gamma - \phi)$$

Transmissibilidade de deslocamento:

$$TR_{abs} = \frac{\sqrt{1 + (2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} = \frac{\sqrt{1 + (2 \times 0,045 \times 0,9)^2}}{\sqrt{(1-0,9^2)^2 + (2 \times 0,045 \times 0,9^2}} = 4,857407$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{90}{\sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}}} = \frac{90}{\sqrt{\frac{6000}{0,6}}} = 0,9$$

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\, m_{eq}\, \omega_n} = \frac{5,4}{2 \times 0,6 \times \sqrt{\frac{6000}{0,6}}} = 0,045$$

Os valores de γ e ϕ são:

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{\omega c}{k} = \tan^{-1} \frac{90 \times 5,4}{6000} = 0,080824 \quad rad$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} = \tan^{-1} \frac{2 \times 0,045 \times 0,9}{1 - 0,9^2} = 0,402985 \quad rad$$

A equação da resposta é então:

$$\theta(t) = 0,005 \times 4,857407 \times \cos(90t + 0,080824 - 0,402985) =$$

$$= \underbrace{0,024287}_{\Theta(\omega)} \times \cos(90t - 0,322161)$$

A amplitude de deslocamento do ponto C, $X_C(\omega)$:

$$X_C(\omega) = A \times \Theta(\omega) = 0,1 \times 0,024287 = 0,0024287 \quad m$$

d)

Os valores de γ e ϕ são:

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{\omega c}{k} \quad \therefore \quad \gamma = \tan^{-1}\frac{90 \times 5,4}{6000} = 0,080824$$

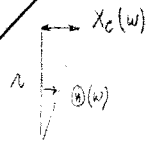
$$\phi = \tan^{-1}\frac{2\gamma\beta}{1-\beta^2} \quad \therefore \quad \gamma = \tan^{-1}\frac{2 \times 0,045002 \times 0,900536}{1 - 0,900536^2} = 0,405056$$

Temos então que a resposta vale:

$$\theta(t) = 5\times10^{-3} \times 4,877903 \times \cos(90t + 0,080824 - 0,405056) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \theta(t) = \underbrace{0,024390}_{\Theta(\omega)} \times \cos(90t - 0,324232)$$

A amplitude de deslocamento do ponto C, $X_c(\omega)$ é então:



$$X_c(\omega) = \lambda \times \Theta(\omega) = 0,1 \times 0,02439 = 0,002439 \text{ mm}$$

e)

- $\beta_1 = \frac{1}{2\gamma}\left[\sqrt{1+8\gamma^2}-1\right]^{1/2} = \frac{1}{2\times0,045}\left[\sqrt{1+8\times0,045^2}-1\right]^{1/2} =$

$= 0,997989$

- $\beta_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} \Rightarrow 0,997989 = \frac{\omega_1}{100} \Leftrightarrow \boxed{\omega_1 = 99,7989 \text{ rad/s}}$

$$TR_{abs} = \frac{\sqrt{1+(2\gamma\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\gamma\beta)^2}} \Rightarrow TR_{abs} = \frac{\sqrt{1+(2\times0,45\times0,997989)^2}}{\sqrt{\left(1-0,997989^2\right)^2+\left(2\times0,045\times0,997989\right)^2}}$$

$\Leftrightarrow TR_{abs} = 11,167152$

$\Theta(\omega) = \gamma$ Trans.

$$\Theta(\omega) = \underbrace{11,167152}_{TR_{abs}} \times 0,005 = 0,055836$$

$$X_c(\omega) = 0,1 \times 0,055836 = 0,0055836 \text{ m} \;//$$

d) $F = m \times \ddot{\theta}$

$-f$

$f_T = k_1\theta + c_1\dot{\theta} - Ks - c\dot{s}$

$= m\ddot{\theta}$

$\rightarrow \theta \leftarrow \leftarrow$

$ma \quad f_k \quad f_c$

$f_T = f_k + f_c$

sensor

ma

$f_T = m\ddot{\theta}$

$m_c =$ (kg)

$F_T = c(\dot{s}(t) - \dot{\theta}R)$

$\vec{\theta} = \begin{Bmatrix} r\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{dF_T}{d\dot{\theta}}\right)$

$\vec{\theta_c} = \begin{Bmatrix} r\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$

$F_T = c\ddot{\theta}R$

$a = \frac{d^2}{dt^2}(x)$

$N \qquad x = \theta r$

$kg\ m/s^2 \qquad a = \ddot{\theta} r$

$x = \theta r$

$\frac{d}{dt}(x) = \frac{d}{dt}(\theta r)$

$\dot{x} = \dot{\theta} r$

$\ddot{x} = \ddot{\theta} r$

$\frac{dT}{d\dot{\theta}} = J_1 \dot{\theta}_1$

$\frac{dT}{d\theta}$

d

~~$F_T = c\dot{s}(t) - c\dot{\theta}tlR$~~

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dF_t}{d\dot{\theta}}\right) = c\ddot{\theta}r$

d $\quad c\dot{\theta}R$

f) $X_c(\omega) < 0{,}022\ m$

$$X_s = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} = 0{,}004595$$

$$\mu = \frac{X_c(\omega)}{X_s} = \frac{1}{|1-\beta^2|}$$

$$X_s \cdot \frac{1}{|1-\beta^2|} = X_c(\omega)$$

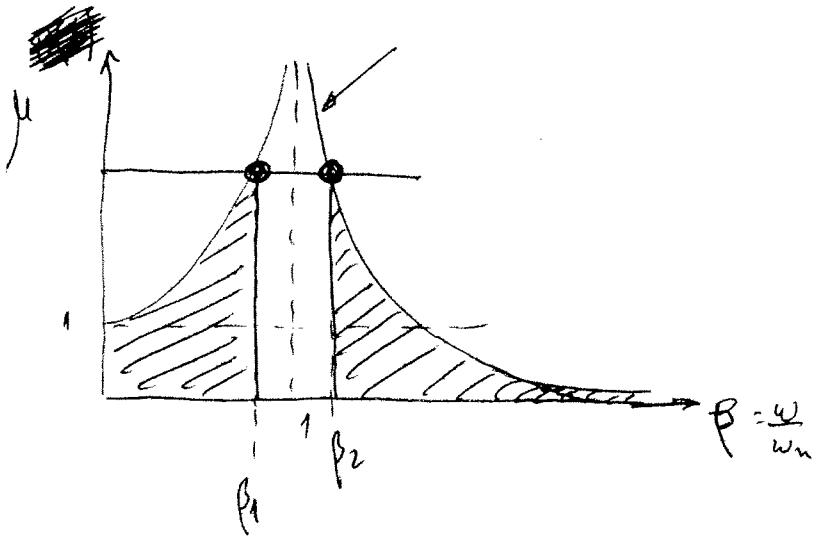
$$X_c(\omega) < 0{,}022$$

$$X_s \cdot \frac{1}{|1-\beta^2|} < 0{,}022 \Leftrightarrow \begin{cases} \beta_1 = 0{,}889458 \\ \beta_2 = 1{,}099483 \end{cases}$$

X_s: $0{,}004595$

$\omega_1 = \beta_1 \omega_n \Rightarrow \omega_1 = 0{,}889458 \times 99{,}940528 \Rightarrow \omega_1 = 88{,}8929\ rad/s$

$\omega_2 = \beta_2 \omega_n \Rightarrow \omega_2 = 109{,}882912\ rad/s$



$\omega < 88{,}8929\ rad/s \quad \omega > 109{,}882912\ rad/s$

Exame de Recurso de 22-07-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x(t)$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{x}(t)$
$q_2 = \theta(t)$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{\theta}(t)$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times 2m \times \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \times m \times (\dot{x} - a\dot{\theta})^2 + \frac{1}{2} \times J_G \times \dot{\theta}^2 =$

$= m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 - 2\dot{x}a\dot{\theta} + a^2\dot{\theta}^2) + \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} m (2a)^2 \times \dot{\theta}^2 =$

$= m\dot{x}^2 + \frac{1}{2} m\dot{x}^2 - ma\dot{x}\dot{\theta} + \frac{1}{2} ma^2\dot{\theta}^2 + \frac{1}{6} ma^2\dot{\theta}^2 =$

$= \frac{3}{2} m\dot{x}^2 - ma\dot{x}\dot{\theta} + \frac{2}{3} ma^2\dot{\theta}^2$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times 2K \times x^2 + \frac{1}{2} \times K \times (x + 2a\theta)^2 =$

$= \frac{1}{2} \times 2K \times x^2 + \frac{1}{2} \times K \times (x^2 + 4xa\theta + 4a^2\theta^2) =$

$= Kx^2 + \frac{1}{2} Kx^2 + 2Kxa\theta + 2Ka^2\theta^2 =$

$= \frac{3}{2} Kx^2 + 2Kax\theta + 2Ka^2\theta^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f(t) \times (\delta x - 2a\,\delta\theta) =$

$= f(t)\,\delta x - 2a\, f(t)\delta\theta$

$Q_1 = f(t) \frac{dx}{dx} - 2a\, f(t) \frac{d\theta}{dx} = f(t)$

$Q_2 = f(t) \frac{dx}{d\theta} - 2a\, f(t) \frac{d\theta}{d\theta} = -2a\, f(t)$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = 3m\ddot{x} - ma\ddot{\theta}$

$\frac{\partial V}{\partial x} = 2Kx + 2Ka\theta$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = -ma\ddot{x} + \frac{1}{3} ma^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2Kax + 4Ka^2\theta$

$$\begin{cases} 3m\ddot{x} - ma\ddot{\theta} + 2Kx + 2Ka\theta = f(t) \\ -ma\ddot{x} + \frac{1}{3} ma^2\ddot{\theta} + 2Kax + 4Ka^2\theta = -2a\, f(t) \end{cases}$$

Na forma matricial, as equações de Lagrange apresentam-se:

$$\begin{bmatrix} 3m & -ma \\ -ma & \frac{1}{3}ma^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & 2Ka \\ 2Ka & 4a^2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ -2af(t) \end{Bmatrix}$$

b) Frequências naturais de vibração:

$$\text{let} \left| \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_{11} & k_{12} - \omega^2 m_{12} \\ k_{21} - \omega^2 m_{21} & k_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \det \left| \begin{bmatrix} 15000 - \omega^2 \times 60 & -10000 - \omega^2 \times (-20) \\ -10000 - \omega^2 \times (-20) & 10000 - \omega^2 \times 30 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (=)$$

(=) $\omega_1 = 9{,}865312 \text{ rad/s}$ $\quad \omega_2 = 19{,}156235 \text{ rad/s}$

Formas naturais de vibração:

$$\left(-10000 - \omega_1^2 \times (-20)\right) u_1 + \left(10000 - \omega_1^2 \times 30\right) u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \left(-10000 - 9{,}865312^2 \times (-20)\right) u_1 + \left(10000 - 9{,}865312^2 \times 30\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

(=) $u_2 = 1{,}137459\, u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}137459 \end{Bmatrix}$

$$\left(-10000 - \omega_2^2 \times (-20)\right) u_1 + \left(10000 - \omega_2^2 \times 30\right) u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \left(-10000 - 19{,}156235^2 \times (-20)\right) u_1 + \left(10000 - 19{,}156235^2 \times 30\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

(=) $u_2 = -2{,}637458\, u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2{,}637458 \end{Bmatrix}$

c) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_1 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}137459 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 30 & -20 \\ -20 & 30 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}137459 \end{Bmatrix} \right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}137459 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}136953 \\ 0{,}155778 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right]^{1/2}} \{u\}_2 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ -2,637458 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 50 & -20 \\ -20 & 10 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,637458 \end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -2,637458 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,051696 \\ -0,136346 \end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base modal:

$$[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,865312^2 & 0 \\ 0 & 19,156235^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,136953 & 0,051696 \\ 0,155778 & -0,136346 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f(t) \\ 2f(t) \end{Bmatrix} \quad (*)$$

$$(=) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,865312^2 & 0 \\ 0 & 19,156235^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,136953\, f(t) + 2 \times 0,155778 \times f(t) \\ 0,051696\, f(t) + 2 \times (-0,136346) \times f(t) \end{Bmatrix} \quad (*)$$

$$(=) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 9,865312^2 & 0 \\ 0 & 19,156235^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,448509\, f(t) \\ -0,220996\, f(t) \end{Bmatrix}$$

d) Temos as equações na base modal:

$$\begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 9,865312^2\, \eta_1(t) = 0,448509 \times 10 \times \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{0,4} t\right) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 19,156235^2\, \eta_2(t) = -0,220996 \times 10 \times \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{0,4} t\right) \end{cases} \quad (=)$$

$$(=) \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 9,865312^2\, \eta_1(t) = 4,48509 \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{0,4} t \\ \ddot{\eta}_2(t) + 19,156235^2\, \eta_2(t) = -2,20996 \times \operatorname{sen} \frac{\pi}{0,4} t \end{cases}$$

Pressamos de:

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} \quad \therefore \quad T_1 = \frac{2\pi}{9,865312} = 0,636897 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_c}{T_1} = \frac{0,4}{0,636897} = 0,628045$$

$$T_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} \quad \therefore \quad T_2 = \frac{2\pi}{19,156235} = 0,327997 \quad \Rightarrow \quad \frac{t_c}{T_2} = \frac{0,4}{19,156235} = 1,219523$$

$$\frac{F_1}{K_1} = \frac{F_1}{\omega_1^2} = \frac{4,48509}{9,865312^2} = 0,046084$$

$$\frac{F_2}{K_2} = \frac{F_2}{\omega_2^2} = \frac{-2,20996}{19,156235^2} = -0,006022$$

Pelo gráfico do espectro de resposta ao choque meia onda seno :

$$\eta_1^{max} \times \frac{1}{F_1/K_1} = 1,7 \quad (\Leftrightarrow \quad \eta_1^{max} = 1,7 \times 0,046084 \quad (\Leftrightarrow \quad \eta_1^{max} = 0,078343$$

$$\eta_2^{max} \times \frac{1}{F_2/K_2} = 1,65 \quad (\Leftrightarrow \quad \eta_2^{max} = 1,65 \times 0,006022 \quad (\Leftrightarrow \quad \eta_2^{max} = 0,009936$$

Então, o valor de $x(t)^{máx}$ é :

$$x(t)^{max} = \phi_{11}\, \eta_1(t)^{max} + \phi_{12}\, \eta_2(t)^{max} =$$

$$= 0,136953 \times 0,078343 + 0,051696 \times 0,009936 =$$

$$= 0,011243$$

Exame de Recurso de 22-07-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 3

a) Comprimento: $\ell = 3\,m$
Simplesmente apoiado para a flexão
Livre-livre para a torção
Módulo de elasticidade longitudinal: $E = 210\,GPa$
Módulo de elasticidade transversal: $G = 80\,GPa$
Massa volúmica: $\rho = 7800\ kg/m^3$

Secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja igual a 25 Hz:

$$f_1 = 25\ Hz \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta_1 \ell)^2}{2\pi}\sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} = 25 \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{2\pi}\sqrt{\frac{210\times10^9 \times \frac{\pi \times d^4}{64}}{7800 \times \frac{\pi \times d^2}{4} \times 3^4}} = 25 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 0{,}110423\ m$$

b) Massa do volante: $m = 580\,kg$
$\rho_m = 2613\ kg/m^3$

Função de aproximação: $V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$

A função de aproximação tem de ser derivável pelo menos 2 vezes, pois é metade da ordem do problema.

$$\frac{d}{dx}V(x) = \frac{\delta\pi}{\ell}\cos\frac{\pi x}{\ell} \qquad \frac{d^2}{dx^2}V(x) = -\frac{\delta\pi^2}{\ell^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell}$$

Condições de fronteira:

$$V(0) = \operatorname{sen}\frac{\pi \times 0}{\ell} = 0$$

$$V(\ell) = \operatorname{sen}\frac{\pi \ell}{\ell} = 0$$

A forma natural fundamental é:



$n = 1$

$$V(x) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

Método da energia de Rayleigh:

$$V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^{\ell} E I(x) \left[\frac{d^2 V(x)}{dx^2} \right]^2 dx + V_{cfn} =$$

$$= \frac{1}{2} E I \int_0^{\ell} \left[-\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} \right]^2 dx + 0 =$$

$$= \frac{1}{2} E I \times \left[\frac{\pi^4 \delta^2}{2 \ell^3} \right] =$$

$$= \frac{E I \pi^4 \delta^2}{4 \ell^3}$$

$$T_{máx} = \omega^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^{\ell} \rho A(x) \left[V(x) \right]^2 dx + T^*_{cfn} \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \rho A \int_0^{\ell} \left(\delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \times m \times \delta^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \rho A \times \frac{\ell \delta^2}{2} + \frac{1}{2} m \delta^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{\rho A \ell \delta^2}{4} + \frac{m \delta^2}{2} \right]$$

$$T^* = \frac{T_{máx}}{\omega^2} = \frac{\delta^2 \rho A \ell}{4} + \frac{m \delta^2}{2}$$

$$\omega^2 = \frac{V_{máx}}{T^*} = \frac{\frac{E I \pi^4 \delta^2}{4 \ell^3}}{\frac{\delta^2 \rho A \ell}{4} + \frac{m \delta^2}{2}} = \frac{E I \pi^4 \cancel{\delta^2} \cancel{4}}{4 \ell^4 \cancel{\delta^2} \rho A} + \frac{E I \pi^4 \cancel{\delta^2} 2}{4 \ell^3 m \cancel{\delta^2}} =$$

$$= \frac{E I \pi^4}{\ell^4 \rho A} + \frac{E I \pi^4}{2 \ell^3 m} = E I \pi^4 \left(\frac{1}{\ell^4 \rho A} + \frac{1}{2 \ell^3 m} \right)$$

O valor de ω é então:

$$\omega = \left[210 \times 10^9 \times \pi^4 \times \left(\frac{1}{3^4 \times 7800 \times \frac{\pi \times 0{,}110423^2}{4}} + \frac{1}{2 \times 3^3 \times 680} \right) \right]^{1/2} = 62753{,}179825 \text{ rad/s}$$