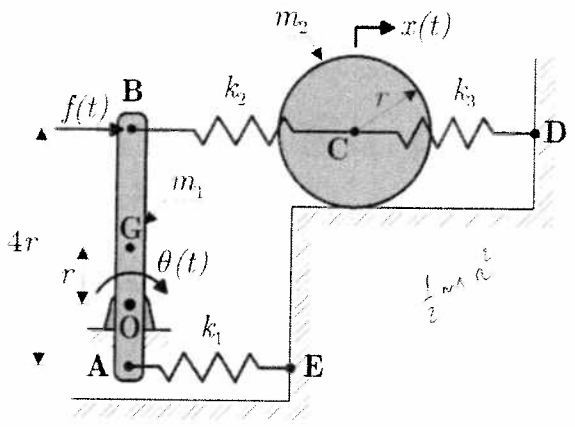


1) (6 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por 2 corpos:

- corpo 1, barra de massa m_1 e de comprimento $4r$ que roda em torno do ponto fixo O, ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez k_1 e ao corpo 2 através da mola linear elástica de rigidez k_2 ;
- corpo 2, disco de massa m_2 e de raio r que rola sem escorregar sobre uma superfície e que se encontra ligado ao corpo 1 através de uma mola linear elástica de rigidez k_2 e ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez k_3 .

As coordenadas generalizadas $x(t)$ e $\theta(t)$ são coordenadas absolutas. Na situação de equilíbrio estático, $x(t) = \theta(t) = 0$ e as molas não estão deformadas. As oscilações angulares podem considerar-se 'pequenas'.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema recorrendo ao formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento são:

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\,000 & -4000 \\ -4000 & 15\,000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Determinar a amplitude do deslocamento do centro do disco devido a uma excitação $f(t) = 100\cos(20t)$.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal, com os vectores modais normalizados para massas modais unitárias.

e) (15%) Determinar o ângulo $\theta(t)$ em função do tempo quando o sistema é sujeito a uma excitação $f(t)$ transiente do tipo meia onda seno:

$$f(t) = \begin{cases} 100\sin\left(\dfrac{\pi}{0.4}t\right) & 0 < t \le 0.4\,\text{s} \\ 0 & t > 0.4\,\text{s} \end{cases}$$

f) (15%) Determinar o valor máximo da resposta $x(t)$ à excitação da alínea anterior.

v.s.f.f.

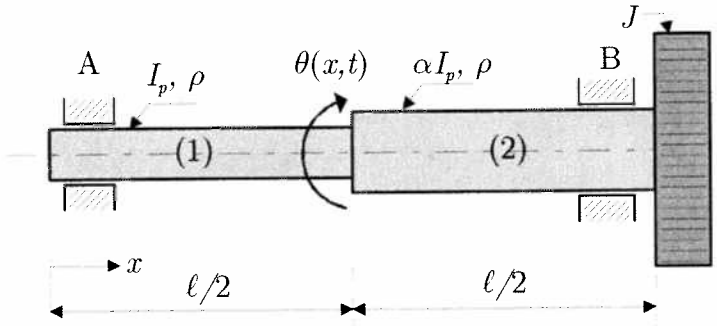
2) (6 val.) Na figura representa-se um veio de dois tramos livre em $x = 0$ e com um volante em $x = \ell$. A secção recta circular do tramo (1), $0 \le x \le \frac{\ell}{2}$, apresenta um momento polar I_p e a secção recta circular do tramo (2), $\frac{\ell}{2} \le x \le \ell$, apresenta um momento polar αI_p. O material do veio possui módulo de elasticidade transversal G e massa volúmica ρ. O momento polar de inércia do volante pode exprimir-se como $J = \beta \rho I_p \ell$.

Considerar as funções $\Theta_1(x) = \delta \cos \frac{\pi}{\ell} x$ e $\Theta_2(x) = \delta \cos \frac{2\pi}{\ell} x$ como eventuais funções de aproximação para a forma natural fundamental de torção.

a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.
b) (20%) Esboçar a representação gráfica das duas funções de aproximação, classificá-las e seleccionar, justificando, a mais adequada para aproximação da forma natural fundamental de torção;
c) (35%) Calcular a estimativa ω_{1R} da frequência natural de vibração de torção utilizando o método de Rayleigh. Exprimir o resultado na forma $\omega_{1R} = g(\delta, \alpha, \beta)\sqrt{\frac{G}{\rho \ell^2}}$ onde $g(\delta, \alpha, \beta)$ representa uma função.

Utilizando a solução analítica exacta da torção para um veio de secção circular constante, $\theta(x,t) = \left(A \cos \frac{\omega}{c} x + B \sin \frac{\omega}{c} x\right)\left(C \cos \omega t + D \sin \omega t\right)$,

d) (30%) estabelecer, sob a forma de determinante, a equação de frequências naturais de vibração de torção para o veio considerado. NOTA: utilizar coordenadas espaciais x_1 e x_2 para os tramos (1) e (2) respectivamente.



$$\int \sin ax dx = -\frac{\cos ax}{a} \qquad \int \cos ax dx = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int x \sin ax dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a} \qquad \int x \sin ax dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}$$

$$\int x^2 \sin ax dx = \frac{2x}{a^2} \sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right) \cos ax \qquad \int x^2 \cos ax dx = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right) \sin ax$$

$$\int x \sin^2 ax dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} \qquad \int x \cos^2 ax dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int \sin^2 ax dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

Feup, 07.07.2010
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

2ª Prova de avaliação 07-07-2010
Parte Prática (2ª Parte da matéria)
Exercício 1

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = \theta(t) \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{\theta}(t)$
$q_2 = x(t) \rightarrow \dot{q}_2 = \dot{x}(t)$

Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} J_1 \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{2} J_2 \left[\dot{x}(t)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} \times m_1 \times (4r)^2 \times \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times m_2 \times r^2 \times \left[\dot{x}(t)\right]^2 =$$

$$= \frac{16}{24} \times m_1 \times r^2 \times \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \left[\dot{x}(t)\right]^2$$

$$= \frac{2}{3} m_1 r^2 \left[\dot{\theta}(t)\right]^2 + \frac{1}{4} m_2 r^2 \left[\dot{x}(t)\right]^2 \qquad \dot{\theta} = \frac{\dot{x}}{r}$$

Energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} k_1 (r \operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2} k_2 (3r \operatorname{sen}\theta)^2 + \frac{1}{2} k_3 (3r \operatorname{sen}\theta + x)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} k_1 r^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 9r^2\theta^2 + \frac{1}{2} k_3 (3r\theta + x)^2$$

Forças não-conservativas:

$$Q_1 = f(t) \frac{\partial \theta}{\partial \theta} + 0 \frac{\partial x}{\partial \theta} = f(t)$$

$$Q_2 = f(t) \frac{\partial \theta}{\partial x} + 0 \frac{\partial x}{\partial x} = 0$$

Considerando as equações de Lagrange na forma:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_1} + \frac{\partial V}{\partial q_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_2} + \frac{\partial V}{\partial q_2} = Q_2 \end{cases}$$

- $\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{4}{3} m_1 r^2 \dot{\theta}$ · $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{4}{3} m_1 r^2 \ddot{\theta}$
- $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$ · $\frac{\partial V}{\partial \theta} = k_1 r^2\theta + 9k_2 r^2\theta + 3k_3 r(3r\theta + x)$
- $\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = \frac{1}{2} m_2 r^2 \dot{x}$ · $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{1}{2} m_2 r^2 \ddot{x}$
- $\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ · $\frac{\partial V}{\partial x} = k_3 (3r\theta + x)$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{3} m_1 r^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta}(t) \\ \ddot{x}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} (k_1 + 9k_2)r^2 + 9k_3 r^2 & 3k_3 r \\ 3k_3 r & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Temos então:

$$\begin{cases} \frac{4}{3} m_1 r^2 \ddot{\theta} + K_1 r^2 \theta + 9 K_2 r^2 \theta + 3 K_3 r (3r\theta + \ell) = f(t) \\ \frac{1}{2} m_2 r^2 \ddot{x} + K_3 (3r\theta + x) = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{4}{3} m_1 r^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m_2 r^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 r^2 + 9 K_2 r^2 + 9 K_3 r^2 & 3 K_3 r \\ 3 K_3 r & K_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Temos:

$$\begin{Bmatrix} \theta(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\begin{Bmatrix} \Theta(\omega) \\ X(\omega) \end{Bmatrix}$$

Fazendo:

$$\begin{bmatrix} 3000 - \omega^2 3 & -4000 \\ -4000 & 15000 - \omega^2 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Igualando o determinante da matriz dos coeficientes do sistema homogéneo a zero, temos:

$$\begin{vmatrix} 3000 - 3\omega^2 & -4000 \\ -4000 & 15000 - 45\omega^2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = 13{,}692 \left[\text{rad/s} \right] \quad \vee$$

$$\vee \quad \omega_2 = 33{,}851 \left[\text{rad/s} \right]$$

Então:

$$\left(3000 - 3 \times 13{,}692^2\right) \times u_1 - 4000 \times u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = 1{,}641\, u_2 \Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1{,}641 \\ 1 \end{Bmatrix} //$$

$$\left(3000 - 3 \times 33{,}851^2\right) \times u_1 - 4000 \times u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = -9{,}139\, u_2 \Rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -9{,}139 \\ 1 \end{Bmatrix} //$$

c) $$X_2(\omega) = \frac{z_{11} F_2 - z_{12} F_1}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}}$$

$$X_2(\omega) = \frac{(3000 - 3\times 20^2)\times 0 - (-4000)\times 0{,}5\times 100}{(3000-3\times 20^2)(15000 - 45\times 20^2) - (-4000)^2} =$$

$$= -0{,}00935 \text{ m}$$

d) Temos:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left(\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right)^{0,5}} \{u\}_1 =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0{,}22524 \\ 0{,}13726 \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left(\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right)^{0,5}} \{u\}_2 =$$

$$= \begin{Bmatrix} -0{,}53159 \\ 0{,}05817 \end{Bmatrix}$$

Então: $[I]\{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega^2]\{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 13{,}692^2 & 0 \\ 0 & 33{,}851^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}22524 & -0{,}53159 \\ 0{,}13726 & 0{,}05817 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0{,}5\, f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{\eta}_1(t) + 13{,}692^2\, \eta_1(t) = 0{,}5 \times 0{,}22524 \times f(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) + 33{,}851^2\, \eta_2(t) = -0{,}53159 \times 0{,}5 \times f(t) \end{cases}$$

g) $$\eta_1(t) = 0{,}089535 \operatorname{sen}(2{,}5000\,\pi t) - 0{,}0005135 \operatorname{sen}(5\pi t)$$

$$\eta_2(t) = 0{,}0063301 \operatorname{sen}(2{,}5\,\pi t) - 0{,}0001687 \operatorname{sen}(5\pi t)$$

$$\theta(t) = 0{,}22524\,\eta_1(t) + 0{,}53160\,\eta_2(t)$$

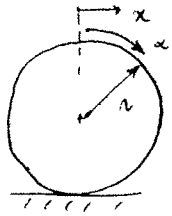
Exercício 1

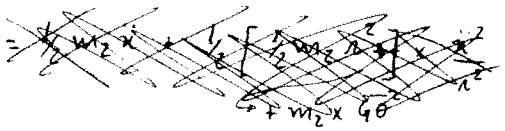
07/07/2010

Coordenadas generalizadas: $\dot{q}_1 = \dot{\theta}$ $\quad q_1 = \theta$

$\dot{q}_2 = \dot{x}$ $\quad q_2 = x$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \times J_c \times \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \times J_\theta^{barra} \times \dot{\theta}^2 =$





$= \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}^2 + \frac{1}{2} \times J_c \times \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} \times J_\theta^{barra} \times \dot{\theta}^2 =$

$x = r \operatorname{sen} \alpha$

$x = r\alpha$

$\dot{x} = r\dot{\alpha}$

$= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2} m_2 r^2\right] \times \frac{\dot{x}^2}{r^2} + \frac{1}{2} \times \left[\frac{1}{12} \times m_1 \times (4r)^2 + m_1 \times r^2\right] \times \dot{\theta}^2 =$

$= \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{4} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{16}{12} m_1 r^2 + m_1 r^2\right] \times \dot{\theta}^2 =$

$= \frac{3}{4} m_2 \dot{x}^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{28}{12} m_1 r^2\right] \dot{\theta}^2 =$

$= \frac{3}{4} m_2 \dot{x}^2 + \frac{7}{6} m_1 r^2 \dot{\theta}^2$

Energia potencial:

$V = E_p = \frac{1}{2} \times k_1 \times (r\theta)^2 + \frac{1}{2} \times k_2 \times (x - 3r\theta)^2 + \frac{1}{2} \times k_3 \times (x)^2$

$= \frac{1}{2} k_1 r^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 (x^2 - 6r\theta x + 9r^2\theta^2) + \frac{1}{2} k_3 x^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 r^2 \theta^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 - 3r\theta k_2 x + 4{,}5 r^2 \theta^2 k_2 + \frac{1}{2} k_3 x^2$

Forças não conservativas: $Q_1 = f(t) \times 3r \frac{d\theta}{d\theta} + 0 = 3r f(t)$

$Q_2 = f(t) \times 3r \frac{d\theta}{dx} + 0 = 0$

Equações de Movimento:

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{\theta}}\right) = \frac{7}{3} m_1 r^2 \ddot{\theta}$ $\qquad \frac{dV}{d\theta} = k_1 r^2 \theta - 3r k_2 x + 9r^2 \theta k_2$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{dT}{d\dot{x}}\right) = \frac{3}{2} m_2 \ddot{x}$ $\qquad \frac{dV}{dx} = k_2 x + k_3 x - 3r\theta k_2$

$$\begin{cases} \frac{7}{3} m_1 r^2 \ddot{\theta} + k_1 r^2 \theta - 3r k_2 x + 9r^2 \theta k_2 = 3r f(t) \\ \frac{3}{2} m_2 \ddot{x} + k_2 x + k_3 x - 3r\theta k_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{7}{3} m_1 r^2 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 r^2 + 9r^2 k_2 & -3r k_2 \\ -3r k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 3r f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) $\det \left| \begin{bmatrix} k_{11} - \omega^2 m_1 & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \right| = 0$

$$\left| \begin{matrix} 3000 - \omega^2 \times 3 & -4000 \\ -4000 & 15000 - \omega^2 \times 45 \end{matrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \underline{\omega_1 = 13,691961 \quad \vee \quad \omega_2 = 33,850607}$$

$$(-4000)u_1 + (15000 - \omega^2 \times 45)u_2 = 0 \xrightarrow{\omega_1} \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,609398 \end{Bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\omega_2} \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,109398 \end{Bmatrix}$$

---

c) $f(t) = 100 \cos(20t)$

$0,5\, f(t) = 50 \cos(20t)$

$z_{11} = -\omega^2 m_{11} + k_{11} = -20^2 \times 3 + 3000 = 1800$

$z_{12} = -\omega^2 m_{12} + k_{12} = -20^2 \times 0 + (-4000) = -4000$

$z_{22} = -\omega^2 m_{22} + k_{22} = -20^2 \times 45 + 15000 = -3000$

$z_{21} = -\omega^2 m_{21} + k_{21} = -20^2 \times 0 + (-4000) = -4000$

$$X_1(\omega) = \frac{z_{11} F_2 - z_{12} F_1}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} = \frac{1800 \times 0 - (-4000) \times 50}{1800 \times (-3000) - (-4000) \times (-4000)} = -0,009346$$

---

d) $\{\phi\}_1 = \frac{1}{\sqrt{\{u\}_1^T [m] \{u\}_1}} \{u\}_1 \Rightarrow \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0,609398 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,609398 \end{Bmatrix} \right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0,609398 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \{\phi\}_1 = \begin{Bmatrix} 0,225237 \\ 0,137259 \end{Bmatrix}$$

$$\Rightarrow \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ -0,109398 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 45 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,109398 \end{Bmatrix} \right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,109398 \end{Bmatrix} =$$

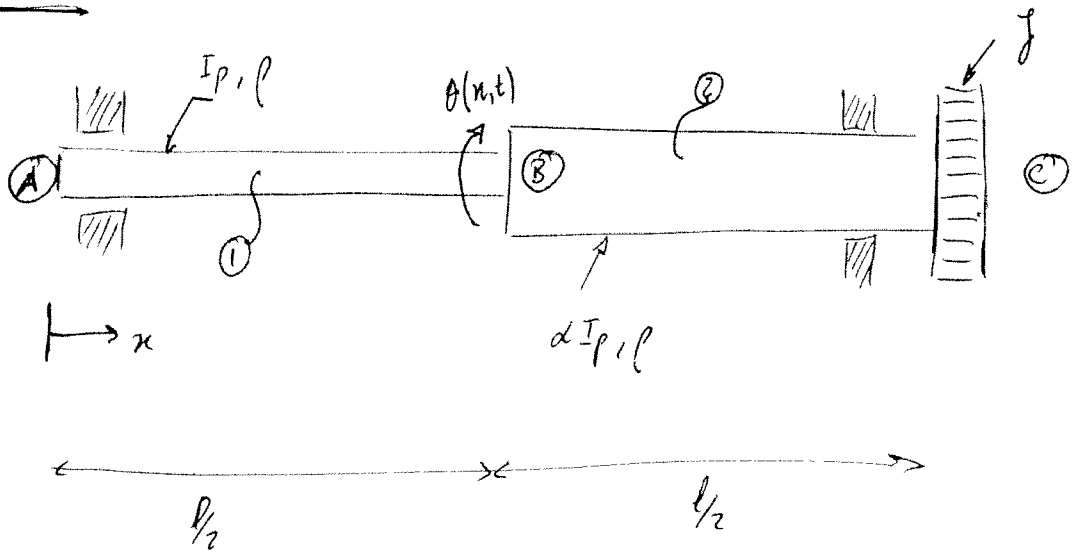
$$= \begin{Bmatrix} 0,531602 \\ -0,058156 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1 \\ \ddot{\eta}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 13,691961^2 & 0 \\ 0 & 33,850607^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0,225237 & 0,531602 \\ 0,137259 & -0,058156 \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} 0,5\, f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0,225237 \times 0,5 \times f(t) \\ 0,531602 \times 0,5 \times f(t) \end{Bmatrix}$$

Exercício 2:

07/07/2010



①	$0 \le x \le \ell/2$	②	$\ell/2 \le x < \ell$
	I_p		αI_p
	$\ell/2$		G
	ρ		$\ell/2$
	G		ρ

Volante: $J = \beta \rho I_p \ell$

a) $\theta_1(x) = \delta \cos \frac{\pi}{\ell} x$ $\quad$ $\theta_2(x) = \delta \cos \frac{2\pi}{\ell} x$ $\quad \Rightarrow$ Aproximações para a forma natural fundamental da torção

Condições de fronteira:

Extremidade (A): $G I_p \left. \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0$ $\quad \Leftarrow$ Condição

A meio do veio (B): $\left| \begin{array}{l} G I_p \frac{\partial \theta_1(x,t)}{\partial x} = G I_p \frac{\theta_2(x,t)}{\partial x} \\ \theta(x=\ell/2^-) = \theta(x=\ell/2^+) \end{array} \right.$

Extremidade (C): $G I_p \frac{\partial \theta(x,t)}{\partial x} = J \frac{\partial^2 \theta(x,t)}{\partial t^2}$