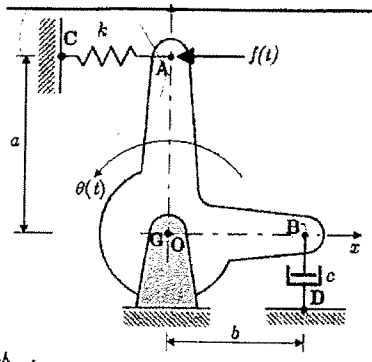


1) (4 val.) A peça em forma de **L** representada na figura oscila em torno do ponto **O**. A peça está ligada ao exterior, através de uma mola linear de rigidez k no ponto **A** e através de um amortecedor viscoso de coeficiente c no ponto **B**. O momento de inércia da peça em relação a um eixo que passa por **O**, perpendicular ao plano Oxy, é J. No ponto **A** está aplicada uma solicitação $f(t)$ na direcção horizontal.

Considerando que na posição de equilíbrio estático o eixo **OA** está na vertical, determinar:

a) (20%) A equação diferencial (linearizada) de movimento do sistema.

Para a aplicação numérica,

$k = 3200$ N/m $\quad c = 40$ Ns/m $\quad J = 0.1$ kgm^2 $\quad a = 0.15$ m $\quad b = 0.15$ m

determinar:

b) (10%) A razão de amortecimento;

c) (10%) A frequência angular amortecida e o respectivo período.

Para uma perturbação inicial $\theta_0 = 10°$ e $\dot{\theta}_0 = 0$ rad/s, determinar,

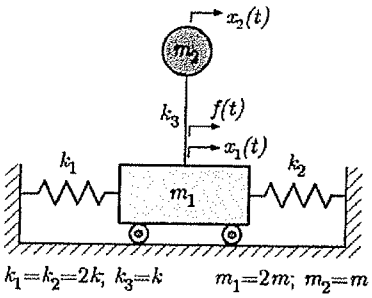
d) (15%) a energia dissipada até ao instante $t = 0.5$ s.

Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$ com uma amplitude de 50 N e uma frequência de 5 Hz, determinar:

e) (15%) a resposta estacionária do sistema;

f) (15%) a frequência de ressonância e a amplitude máxima de resposta no ponto **A**;

g) (15%) redimensionar a constante de rigidez k da mola de modo que a amplitude da força transmitida ao apoio **C** seja inferior a 50 N.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por uma carruagem de massa m_1, ligada ao exterior por duas molas de rigidez k_1 e k_2, e que possui encastrada uma barra de rigidez à flexão k_3 na extremidade da qual está igualmente encastrada uma esfera de massa m_2.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelos deslocamentos absolutos $x_1(t)$ e $x_2(t)$ da carruagem e da esfera, respectivamente.

a) (20%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para resolver as alíneas seguintes, utilizar as equações de movimento seguintes:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5k & -k \\ -k & k \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (20%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

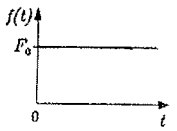
Para $k = 200$ Nm^{-1} e $m = 2$ kg,

c) (20%) Determinar a amplitude $X_1(\omega)$ quando $f(t) = F\cos\omega t$ com $\omega = 14.4$ rads^{-1}.

d) (10%) Se $f(t) = F\cos\omega t$, determinar a frequência de excitação ω para a qual o sistema barra/esfera actua como um absorsor de vibrações.

e) (10%) Escrever as equações de movimento do sistema na base modal.

f) (20%) Determinar uma estimativa do valor máximo da resposta $x_1(t)$ para uma solicitação $f(t)$ transiente conforme representado na figura.



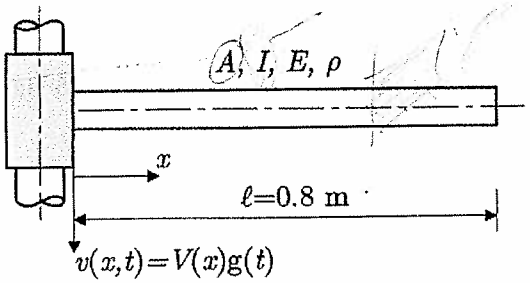
v.s.f.f.

3) (4 val.) A figura a) representa um braço de robot para movimentação de peças. O braço apresenta um comprimento $\ell = 0.8$ m e uma secção recta circular constante. O material do braço possui módulo de elasticidade $E = 210$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. Para a análise da flexão do braço, considere-se a extremidade $x = 0$ fixa.

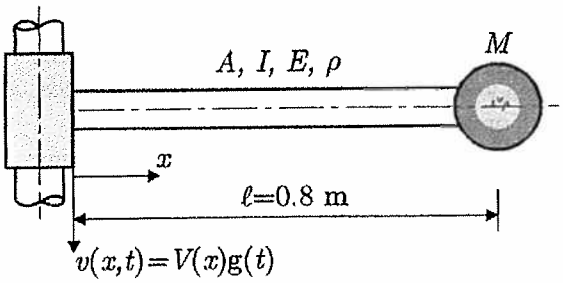
a) (40%) Dimensionar a recção recta do braço de modo que a frequência natural de flexão seja igual a 35 Hz.

A figura b) representa o braço com uma peça de massa M concentrada na extremidade $x = \ell$. Considerando o método da energia de Rayleigh e a família de funções $V_i(x) = \delta\left(\frac{x}{\ell}\right)^i \quad i = 1,\ldots,\infty$,

b) (20%) seleccionar, justificando, uma função de aproximação adequada;
c) (20%) estabelecer uma expressão para a frequência natural de flexão;
d) (20%) determinar o valor da frequência natural de flexão para M igual a 25% da massa do braço.



a)

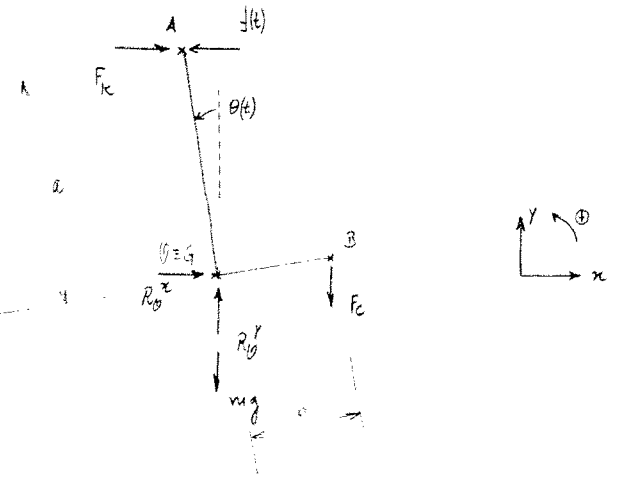


b)

Feup, 28.09.2010
José Dias Rodrigues

Exercício 1

a) Quando perturbamos o sistema temos:



Distâncias:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\,\text{sen}\,\theta \\ +a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -a\theta \\ +a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{OB} = \begin{Bmatrix} b\cos\theta \\ +b\,\text{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OB} = \begin{Bmatrix} b \\ +b\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Velocidades:

$$\vec{v}_B = \dot{\vec{OB}} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Forças resistentes:

$$\vec{F}_k = -k \times \Delta\vec{OA} = -k \times \left[\begin{Bmatrix} -a\theta \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ -a \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_c = -c \times \vec{v}_B = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ +b\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_G + \underbrace{\vec{v}_G}_{=0} \times \vec{Q}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação diferencial do movimento:

$$\sum \vec{\Pi}_{/O} = \vec{K}_{/O} \quad \therefore$$

$$\vec{OA} \times \left(\vec{F_k} + \vec{f}(t) \right) + \vec{OB} \times \vec{F_c} = \vec{K}_{/O} \quad (\Rightarrow$$

$$(\Rightarrow \begin{Bmatrix} -a\theta \\ a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \left[\begin{Bmatrix} ka\theta \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -f(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] + \begin{Bmatrix} b \\ b\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -cb\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (\Rightarrow$$

$$(\Rightarrow -ka^2\theta + a f(t) - cb^2\dot{\theta} = J\ddot{\theta} \quad (\Rightarrow$$

$$(\Rightarrow J\ddot{\theta}(t) + cb^2\dot{\theta}(t) + ka^2\theta(t) = a f(t)$$

b) Frequência natural não amortecida, ω_n

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{3200 \times 0{,}15^2}{0{,}1}} = 26{,}832816 \ rad/s$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{C_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{40 \times 0{,}15^2}{2 \times 0{,}1 \times 26{,}832816} = 0{,}167705$$

c) Frequência angular amortecida, ω_d:

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 26{,}832816 \times \sqrt{1 - 0{,}167705^2} = 26{,}452789 \ rad/s$$

Período natural amortecido, T_d:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \quad \therefore \quad T_d = \frac{2\pi}{26{,}452789} = 0{,}237524 \ s$$

d) No instante inicial, $t = 0s$:

$$E_p = \frac{1}{2} \times k \times x^2 \quad \therefore \quad E_p = \frac{1}{2} \times 3200 \times \left(0{,}15 \times \frac{10 \times \pi}{180} \right)^2 = 1{,}096623 \ J$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times m \times \underbrace{\dot{x}^2}_{=0} + \frac{1}{2} \times J \times \dot{\theta}^2 \quad \therefore \quad E_c = \frac{1}{2} \times 0{,}1 \times 0 = 0 \ J$$

porque o ponto G é fixo

Para o instante $t = 0,5\ s$:

$$\theta(t) = A\, e^{-\zeta \omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi) \quad , \text{ onde :}$$

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \qquad e \qquad \phi = \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1} \quad , \text{ sendo :}$$

$$A_1 = \theta_0 \qquad e \qquad A_2 = \frac{\dot{\theta}_0 + \zeta \omega_n \theta_0}{\omega_d}$$

Então :

$$A_1 = \frac{10 \times \pi}{180} = 0,174533$$

$$A_2 = \frac{0 + 0,167705 \times 26,832816 \times 0,174533}{26,452789} = 0,029691$$

$$A = \sqrt{0,174533^2 + 0,029691^2} = 0,177040$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{0,029691}{0,174533} = 0,168504$$

$$\theta(t=0,5s) = 0,177040 \times e^{-0,167705 \times 26,832816 \times 0,5} \cos(26,452789 \times 0,5 - 0,168504) = 0,016451\ rad$$

$$\dot{\theta}(t) = A\, e^{-\zeta \omega_n t}\, \omega_n \cos(\omega_d t - \phi - \psi) \quad , \text{ onde : } \psi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

Então:

$$\psi = \tan^{-1} \frac{\sqrt{1 - 0,167705^2}}{0,167705} = 1,402295$$

$$\dot{\theta}(t=0,5s) = 0,177040 \times e^{-0,167705 \times 26,832816 \times 0,5} \times 26,832816 \times \cos(26,452789 \times 0,5 - 0,168504 - 1,402295) =$$

$$= 0,306995\ rad/s$$

$$E_p = \frac{1}{2} \times k \times x^2 \quad \therefore \quad E_p = \frac{1}{2} \times 3200 \times (0,15 \times 0,016451)^2 = 0,009743\ J$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times m \times \cancel{\dot{x}^2}^{\,=0} + \frac{1}{2} \times J \times \dot{\theta}^2 \quad \therefore \quad E_c = \frac{1}{2} \times 0,1 \times 0,306995^2 = 0,004712\ J$$

Energia dissipada até ao instante $t = 0,5\ s$:

$$E_d = E_0 - E_{t=0,5s} = (E_{p_0} + E_{c_0}) - (E_{p_{t=0,5s}} + E_{c_{t=0,5s}}) =$$

$$= 1,096623 - (0,009743 + 0,004712) = 1,082168\ J$$

e) Para uma solicitação harmónica, a resposta permanente é:

$$\theta_p(t) = \Theta_s \, \mu \cos(\omega t - \phi) \quad , \text{ onde:}$$

$$\Theta_s = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad \therefore \quad \Theta_s = \frac{0{,}15 \times 50}{3200 \times 0{,}15^2} = 0{,}104167$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = 5 \times 2\pi \times \frac{1}{26{,}832816} = 1{,}170802$$

$$\mu = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore \quad \mu = \frac{1}{\sqrt{(1-1{,}170802^2)^2 + (2 \times 0{,}167705 \times 1{,}170802)^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \mu = 1{,}851572$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{(1-\beta^2)} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0{,}167705 \times 1{,}170802}{1 - 1{,}170802^2} = -0{,}814103 \text{ rad}$$

Temos então:

$$\theta_p(t) = 0{,}104167 \times 1{,}851572 \times \cos(10\pi t + 0{,}814103) =$$

$$= 0{,}192873 \cos(10\pi t + 0{,}814103)$$

f) Frequência de ressonância:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 26{,}832816 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}167705^2} = 26{,}067222 \text{ rad/s}$$

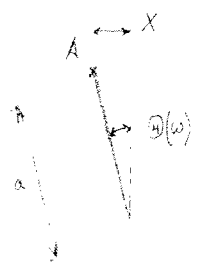
Amplitude máxima da resposta no ponto A:

$$\mu_{máx} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \mu_{máx} = \frac{1}{2 \times 0{,}167705 \times \sqrt{1 - 0{,}167705^2}} = 3{,}024258$$

$$\Theta(\omega) = \Theta_s \times \mu \quad \therefore \quad \Theta(\omega) = 0{,}104167 \times 3{,}024258 = 0{,}315028$$

No ponto A fica:

$$X = a \times \text{sen}\, \Theta(\omega) \quad \therefore \quad X = 0{,}15 \times \text{sen}\, 0{,}315028 = 0{,}046476 \text{ m}$$



Exame de Conclusão de Curso de 28-09-2010 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Coordenadas generalizadas:

$$q_1 = x_1(t) \Rightarrow \dot{q}_1 = \dot{x}_1(t)$$
$$q_2 = x_2(t) \Rightarrow \dot{q}_2 = \dot{x}_2(t)$$

Note-se que $x_1(t)$ e $x_2(t)$ são deslocamentos absolutos.

Energia cinética:

$$T = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \times 2m \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m \times \dot{x}_2^2 =$$
$$= m\dot{x}_1^2 + \frac{m}{2}\dot{x}_2^2$$

Energia potencial:

$$V = \frac{1}{2} \times k_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_2 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_3 \times (x_2 - x_1)^2 =$$
$$= \frac{1}{2} \times 2k \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times 2k \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k \times (x_2 - x_1)^2 =$$
$$= 2kx_1^2 + \frac{k}{2}(x_2 - x_1)^2$$

Forças não-conservativas:

$$Q_1 = f(t)\frac{\partial x_1}{\partial x_1} + 0\frac{\partial x_2}{\partial x_1} = f(t)$$

$$Q_2 = f(t)\frac{\partial x_1}{\partial x_2} + 0\frac{\partial x_2}{\partial x_2} = 0$$

Equações de Lagrange:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1} = 2m\dot{x}_1 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 2m\ddot{x}_1$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_1} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = 4kx_1 + k(x_2 - x_1)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2} = m\dot{x}_2 \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_2$$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0 \qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k(x_2 - x_1)$$

Temos então:

$$\begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 4Kx_1 + K(x_2 - x_1) = f(t) \\ m\ddot{x}_2 + K(x_2 - x_1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 4Kx_1 + Kx_2 - Kx_1 = f(t) \\ m\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2m\ddot{x}_1 + 3Kx_1 + Kx_2 = f(t) \\ m\ddot{x}_2 + Kx_2 - Kx_1 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) As equações do movimento são:

$$\begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5K & -K \\ -K & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Temos:

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 5K - \omega^2 2m & -K \\ -K & K - \omega^2 m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \omega_2 = 1{,}66757 \sqrt{\frac{K}{m}} \quad \vee$$

$$\vee \quad \omega_1 = 0{,}84807 \sqrt{\frac{K}{m}}$$

Segunda forma natural:

$$(5K - \omega_1^2 \times 2 \times m)\, u_1 - K u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \left(5K - 1{,}66757^2 \frac{K}{m} \times 2 \times m\right) u_1 - K u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5K - 5{,}56158\,K)\, u_1 - K u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -0{,}56158\, K u_1 = K u_2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{-0{,}56158} u_2 \Leftrightarrow u_1 = -1{,}78069\, u_2$$

Então: $\{u\}_2 = \begin{Bmatrix} -1{,}78069 \\ 1 \end{Bmatrix}$

Primeira forma natural:

$$(5K - \omega_2^2 \times 2 \times m)\, u_1 - K u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \left(5K - 0{,}84807^2 \frac{K}{m} \times 2 \times m\right) u_1 - K u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (5K - 1{,}43845\,K)\, u_1 - K u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3{,}56155\,K\, u_1 - K u_2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3{,}56155\,K\, u_1 = K u_2 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_1 = \frac{1}{3{,}56155} u_2 \quad \Leftrightarrow \quad u_1 = 0{,}28078\, u_2$$

Então: $\{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 0{,}28078 \\ 1 \end{Bmatrix}$

c) Considerando: $f(t) = F \cos \omega t$ e $\omega = 14{,}4\ rad/s$

$k = 200\ N/m$ e $m = 2\ kg$

As equações do movimento:

$$\begin{bmatrix} 2\times2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5\times200 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1000 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F\cos\omega t \\ 0 \end{Bmatrix}$$

A amplitude $X_1(\omega)$ é dado por:

$$X_1(\omega) = \frac{(K_{22} - \omega^2 m_2) F}{(K_{11} - \omega^2 m_1)(K_{22} - \omega^2 m_2) - (K_{12})^2}$$

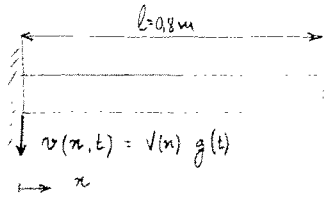
$$\therefore X_1(\omega) = \frac{(200 - 14{,}4^2 \times 2) F}{(1000 - 14{,}4^2 \times 2 \times 2)(200 - 14{,}4^2 \times 2) - (-200)^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X_1(\omega) = 0{,}0028\, F$$

Exercício 3

a) Comprimento: $l = 0{,}8$ m
Secção reta circular
Módulo de elasticidade: $E = 210$ GPa
Massa volúmica: $\rho = 7800$ kg/m^3

Esquematicamente, temos:



Condições de fronteira: fixa - livre

$\beta_1 l = 1{,}8751$

$\alpha_n = 0{,}7341$

Então:

$$f_1 = 35 \quad (=)$$

$$(=) \quad (\beta_1 l)^2 \times \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A l^4}} = 35 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 1{,}8751^2 \times \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{210\times10^9 \times \frac{\pi d^4}{64}}{7800 \times \frac{\pi d^2}{4} \times 0{,}8^4}} = 35 \quad (=)$$

$$(=) \quad d = 0{,}030859 \text{ m}$$

b) Família de funções: $V(x) = \delta \left(\frac{x}{l}\right)^i$, $i = 1 \ldots \infty$

Problema de flexão, logo a função de aproximação tem de ser derivável pelo menos 2 vezes, que é metade da ordem do problema (4^a ordem).

Para que seja verificada a condição de derivável pelo menos 2 vezes, então $i = 2$.

$$V(x) = \delta \left(\frac{x}{l}\right)^2$$

$$\frac{d}{dx} V(x) = \frac{2\delta x}{l^2} \qquad \frac{d^2}{dx^2} V(x) = \frac{2\delta}{l^2}$$

Verificando as condições de fronteira, temos:

$$x = 0 \quad \therefore \quad v(0) = \delta \left(\frac{0}{\ell}\right)^2 = 0$$

$$x = \ell \quad \therefore \quad v(\ell) = \delta \left(\frac{\ell}{\ell}\right)^2 = \delta$$

c) Método da energia de Rayleigh : vibrações de flexão de vigas

$$\cdot \; V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x) \left(\frac{d^2 v(x)}{dx^2}\right)^2 dx + V_{cfg} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x) \left(\frac{2\delta}{\ell^2}\right)^2 dx + 0 =$$

$$= EI \, \frac{2\delta^2}{\ell^3}$$

$$\cdot \; T_{máx} = \omega^2 \left[\frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A(x) \, (v(x))^2 \, dx + T^*_{cfg} \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell \left[\delta \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]^2 dx + \frac{1}{2} \times M \times \delta^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{1}{2} \times \rho \times A \times \frac{\delta^2 \ell}{5} + \frac{1}{2} M \delta^2 \right] =$$

$$= \omega^2 \left[\frac{\rho A \delta^2 \ell}{10} + \frac{1}{2} M \delta^2 \right]$$

$$\cdot \; T_{máx} = \omega^2 \, T^* \quad (=)$$

$$(=) \; T^* = \frac{\rho A \delta^2 \ell}{10} + \frac{1}{2} M \delta^2$$

$$\cdot \; \omega^2 = \frac{V_{máx}}{T^*} \quad \therefore \quad \omega^2 = \frac{EI \, \frac{2\delta^2}{\ell^3}}{\frac{\rho A \delta^2 \ell}{10} + \frac{1}{2} M \delta^2} \quad (=)$$

$$(=) \; \omega^2 = \frac{20 EI \, \delta^2}{\rho A \delta^2 \ell^4} + \frac{4 EI \, \delta^2}{M \ell^3 \delta^2} \quad (=) \quad \omega = \left[\frac{20EI}{\rho A \ell^4} + \frac{4EI}{M \ell^3} \right]^{1/2}$$

d) Massa do braço:

$$M_{braço} = \frac{\pi \times d^2}{4} \times l \times \rho = \frac{\pi \times 0{,}030859^2}{4} \times 0{,}8 \times 7800 = 4{,}667004 \text{ kg}$$

Massa da massa concentrada

$$M_M = 0{,}25 \times M_{braço} = 0{,}25 \times 4{,}667004 = 1{,}166751 \text{ kg}$$

Então:

$$\omega = \frac{80 \times 210 \times 10^9 \times \pi \times 0{,}030859^4 \times 4}{64 \times 7800 \times \pi \times 0{,}030859^2 \times 0{,}8^4} + \frac{4 \times 210 \times 10^9 \times \pi \times 0{,}030859^4}{64 \times 1{,}166751 \times 0{,}8^3} =$$

$$= 140835{,}116308 \text{ rad/s}$$