

1) (4 val.) O rotor de um instrumento de medição é controlado por uma mola de torção de rigidez k e um amortecedor viscoso de rotação de constante c, conforme representado na figura. A massa do rotor é $m = 50 \times 10^{-3}$ kg e o seu raio de giração em relação ao seu eixo de rotação é $r_g = 10$ mm (NOTA: $r_g^2 = J / m$).

A oscilação do rotor é descrita pelo parâmetro $\theta(t)$ referenciado à posição de equilíbrio estático.

Quando perturbado, o rotor realiza uma oscilação completa em 3.25 s, sendo a razão entre duas amplitudes consecutivas de $15 / 3$.

Determinar:

a) (15%) a razão de amortecimento ξ;

b) (15%) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

c) (15%) a constante de rigidez k da mola de torção e a constante de amortecimento viscoso c do amortecedor (de rotação).

Se o rotor, inicialmente em repouso, receber um impulso que lhe provoca uma rotação máxima de 15 °, determinar:

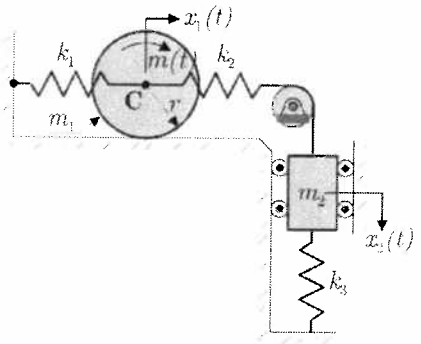
d) (10%) o tempo que demorou a rodar 15 °;

e) (15%) a energia fornecida pelo impulso.

Se ao rotor for aplicado um momento $m(t) = M_0 \cos \omega t$, determinar,

f) (15%) a frequência de excitação ω para a qual ocorre a resposta máxima e o respectivo valor de resposta;

g) (15%) a(s) gama(s) de frequências para a(s) qual(is) o momento transmitido pela mola é inferior a $1.5M_0$.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por um cilindro de raio r e massa m_1 que rola sem escorregar sobre uma superfície plana. O cilindro está ligado ao exterior por uma mola de rigidez k_1 e a uma massa m_2 por uma mola de rigidez k_2. A massa m_2 translada verticalmente e está ligada ao exterior por uma mola de rigidez k_3.

No eixo do cilindro está aplicada uma solicitação $m(t)$. O movimento do sistema, a partir da posição de equilíbrio estático, é descrito pelas coordenadas absolutas $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para os valores seguintes:

$m_1 = 3m, \quad m_2 = m, \quad r = 0.1\,\text{m}, \quad k_1 = 3k, \quad k_2 = k, \quad k_3 = k,$

b) (10%) estabelecer a equação característica polinomial;

c) (10%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração;

d) (10%) Exprimir as equações de movimento na base modal com massas modais unitárias;

Para $m = 5$ kg e $k = 8000$ N/m,

e) (15%) Determinar o valor máximo da resposta $x_2(t)$ devido a um momento harmónico de amplitude M_0 e de frequência $\omega = 43$ rad/s e escrever a expressão da resposta $x_2(t)$.

f) (10%) Redimensionar k_3 de modo que a massa m_2 funcione como um absorsor de vibrações.

g) (15%) Para condições iniciais nulas, e utilizando a análise modal truncada, determinar a resposta $x_2(t)$ provocada pela excitação $m(t) = \begin{cases} M_0 & 0 \le t \le 0.053 \text{ s} \\ 0 & t > 0.053 \text{ s} \end{cases}$

3) (4 val.) A figura a) representa um veio em aço de comprimento $\ell = 1.25$ m e simplesmente apoiado. O material do veio (aço) apresenta módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa, módulo de elasticidade transversal $G = 80$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. A secção recta do veio é circular de diâmetro d.

a) (25%) Dimensionar a secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 75 Hz;

Para rigidificar a montagem, montou-se um apoio elástico de rigidez k em $\ell / 2$, conforme representado na figura b).

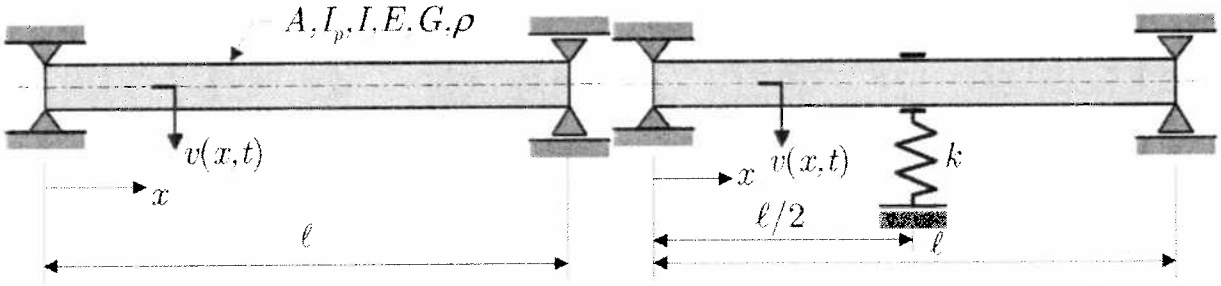
Aplicando o método da energia de Rayleigh,

b) (10%) Estabelecer, justificando, uma função de aproximação $V(x)$ adequada;

c) (30%) Determinar e caracterizar uma estimativa ω_1^R da frequência natural fundamental. Apresentar o resultado para $k = \alpha \dfrac{EI}{\ell}$ onde α representa um escalar.

d) (15%) Indicar o valor da frequência natural fundamental exacta para o valor limite $k \to \infty$;

e) (20%) Discutir a validade da solução fornecida pelo método de Rayleigh, com a função $V(x)$ utilizada, para os valores limite $k \to 0$ e $k \to \infty$.



a) b)

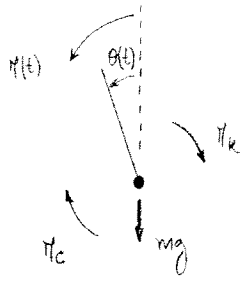
NOTA: Secção circular: $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$, $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$.

FEUP, 31 de Outubro de 2011
José Dias Rodrigues

Exame de Trabalhador-Estudante de 31-10-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

Perturbando o sistema, temos:



E com os dados iniciais temos:

$m = 50 \times 10^{-3}$ Kg

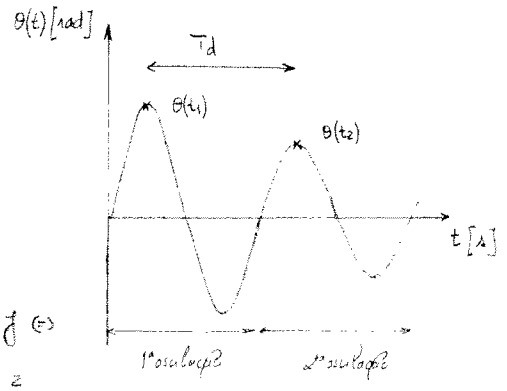
$r_g = 10$ mm

$T_d = 3{,}25$ s

$\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} = \frac{15}{3}$

$r_0^2 = \frac{J}{m} \therefore 0{,}01^2 \times 50 \times 10^{-3} = J \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow J = 5 \times 10^{-6}$ Kg m^2



a) Decremento logarítmico, δ:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \therefore \delta = \frac{1}{1} \ln \frac{15}{3} \Leftrightarrow \delta = 1{,}609438$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \therefore \zeta = \frac{1{,}609438}{\sqrt{4\pi^2 + 1{,}609438^2}} \Leftrightarrow \zeta = 0{,}248139$$

b) Frequência natural amortecida, ω_d:

$$T_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \Leftrightarrow \omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \therefore \omega_d = \frac{2\pi}{3{,}25} \Leftrightarrow \omega_d = 1{,}932288 \text{ rad/s}$$

Frequência natural angular não amortecida, ω_n:

$$\omega_d = \omega_n \times \sqrt{1-\zeta^2} \Leftrightarrow \omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1-\zeta^2}} \therefore \omega_n = \frac{1,933288}{\sqrt{1-0,248139^2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_n = 1,995705 \text{ rad/s}$$

c) Equação diferencial do movimento:

$$J\ddot{\theta}(t) + c\dot{\theta}(t) + K\theta(t) = m(t)$$

Constante de rigidez K da mola:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \Leftrightarrow \omega_n = \sqrt{\frac{K_t}{J}} \therefore 1,995705 = \sqrt{\frac{K_t}{5\times10^{-6}}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow K_t = 1,991419 \times 10^{-5} \text{ N/m}$$

Constante de amortecimento viscoso, c:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 \times m_{eq} \times \omega_n} \therefore 0,248139 = \frac{c}{2 \times 5\times10^{-6} \times 1,995705} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow c = 4,952122 \times 10^{-6}$$

d) Um impulso é equivalente a dar ao sistema uma velocidade inicial $\dot{\theta}_0$ não nula e um deslocamento inicial nulo.
A resposta livre ou natural do sistema sub-amortecido é:

$$\theta(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t - \phi)$$

Para a resposta máxima de 15° está associada uma velocidade nula $\dot{\theta}=0$ e o instante em que ela máximo é atingido é dado por:

$$t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{\omega_d}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) + (n+1)\pi + \phi\right] \wedge n=1 \therefore$$

$$\therefore t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{1,933288}\left[\tan^{-1}\left(\frac{0,248139}{\sqrt{1-0,248139^2}}\right) + 0 + \frac{\pi}{2}\right] \wedge n=1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = 0,682794 \text{ s}$$

A constante ϕ é calculada através da expressão:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_d \theta_0} \quad (\dot{\theta}_0 = 0) \quad \phi = \tan^{-1} \infty \Leftrightarrow \phi = \frac{\pi}{2}$$

c) Energia no instante inicial, t=0s, é:

$$E(t=0) = E_c(t=0) + E_p(t=0) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \dot{\theta}_0^2 \times m_{eq} + \frac{1}{2} \times \theta_0^2 \times K_{eq} =$$

$$= \frac{1}{2} \times \dot{\theta}_0^2 \times 5 \times 10^{-6} \qquad \text{(equação 1)}$$

Constante A através da equação da resposta natural do sistema:

$$\theta(t) = A \times e^{-\xi \omega_n t} \times \cos(\omega_d t - \phi) \therefore$$

$$\therefore \frac{25 \times \pi}{180} = A \times e^{-0,248139 \times 5,995705 \times 0,682794} \times \cos\left(1,933288 \times 0,682794 - \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A = 0,378979$$

Velocidade inicial $\dot{\theta}_0$ através da equação de A:

$$A = \left[\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \xi \omega_n \theta_0}{\omega_d} \right)^2 + \theta_0^2 \right]^{1/2} \Leftrightarrow \left[\frac{\dot{\theta}_0}{\omega_d} \right] = A \therefore$$

$$\therefore 0,378979 = \frac{\dot{\theta}_0}{1,933288} \Leftrightarrow \dot{\theta}_0 = 0,732676 \ rad/s$$

Voltando à equação 1, a energia no instante inicial, isto é, a energia fornecida pelo impulso é:

$$E(t=0) = \frac{1}{2} \times 0,732676 \times 5 \times 10^{-6} \Leftrightarrow E(t=0) = 1,342035 \times 10^{-6} \ J$$

f) A frequência de excitação ω para a qual ocorre a resposta máxima é a frequência de ressonância ω_r dada por:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 1{,}995705 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}248139^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad \omega_r = 1{,}868788 \ \text{rad/s}$$

Factor de amplificação máximo:

$$\mu_{máx} = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \mu_{max} = \frac{1}{2 \times 0{,}248139 \times \sqrt{1 - 0{,}248139^2}} \quad (=)$$

$$(=) \quad \mu_{máx} = 2{,}080055$$

Resposta máxima do sistema:

$$H(\omega) = \mu_{máx} \times H_s \quad \therefore \quad H(\omega) = 2{,}080055 \times \frac{H_0}{K_t} \quad (=)$$

$$(=) \quad H(\omega) = 2{,}080055 \times \frac{H_0}{1{,}991419 \times 10^{-5}} \quad (=)$$

$$(=) \quad H(\omega) = 104450{,}896572 \ H_0$$

g)

Exercício 2

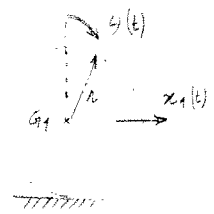
a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x_1(t)$, $q_2 = x_2(t)$; $\dot{q}_1 = \dot{x}_1(t)$, $\dot{q}_2 = \dot{x}_2(t)$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times J_{G_1} \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m_1 r^2 \times \frac{\dot{x}_1^2}{r^2} + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$



$x_1(t) = r\,\theta(t)$

$\dot{x}_1(t) = r\,\dot{\theta}(t)$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times k_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times k_2 \times (x_2 - x_1)^2 + \frac{1}{2} \times k_3 \times (-x_2)^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 (x_2^2 - 2 x_2 x_1 + x_1^2) + \frac{1}{2} k_3 x_2^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 x_1^2 + \frac{1}{2} k_2 x_2^2 - k_2 x_2 x_1 + \frac{1}{2} k_2 x_1^2 + \frac{1}{2} k_3 x_2^2$

Forças não conservativas: $\delta W = m(t)\,\delta\theta = m(t)\,\frac{1}{r}\,\delta x_1$

$Q_1 = \frac{m(t)}{r} \frac{dx_1}{dx_1} + 0 = \frac{m(t)}{r}$ $\qquad Q_2 = 0$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = k_2 x_2 - k_2 x_1 + k_3 x_2$

Nota: $k_3 x_2^2 = W$

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_1} + \frac{\partial V}{\partial x_1} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) - \frac{\partial T}{\partial x_2} + \frac{\partial V}{\partial x_2} = Q_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 x_2 + k_2 x_1 = \frac{m(t)}{r} \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 x_2 - k_2 x_1 + k_3 x_2 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} m(t)/r \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Para os valores numéricos dados temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} \times 3m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K+K & -K \\ -K & K+K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10\,m(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 4{,}5m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 4K & -K \\ -K & 2K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 10\,m(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Equação característica polinomial, no caso da matriz massa ser diagonal:

$$m_1 m_2 \omega^4 - (m_1 k_{22} + m_2 k_{11})\omega^2 + k_{11}k_{22} - k_{12}k_{21} = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 4{,}5m \times m \times \omega^4 - (4{,}5m \times 2K + m \times 4K)\omega^2 + 4K \times 2K - (-K)\times(-K) = 0 \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad 4{,}5m^2\omega^4 - (9mK + 4mK)\omega^2 + 8K^2 - K^2 = 0 \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad 4{,}5m^2\omega^4 - 13mK\omega^2 + 7K^2 = 0$$

c) Frequências naturais de vibração:

$$\left| \begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \left| \begin{bmatrix} 4K - \omega^2 \times 4{,}5m & -K \\ -K & 2K - \omega^2 \times m \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad \omega_1 = 0{,}846073\sqrt{\frac{K}{m}} \quad V \quad \omega_2 = 1{,}474126\sqrt{\frac{K}{m}}$$

Ou resolvendo a equação característica polinomial obtida na alínea b).

Formas naturais de vibração:

$$-K u_1 + \left(2K - 0{,}846073^2 \frac{K}{m} \times m\right) u_2 = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad u_2 = 0{,}7787819\, u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}7787819 \end{Bmatrix}$$

$$-K u_1 + \left(2K - 1{,}474126^2 \frac{K}{m} \times m\right) u_2 = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad u_2 = -5{,}778761\, u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -5{,}778761 \end{Bmatrix}$$

d) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{\frac{1}{2}}} \{u\}_1 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}7787819 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 4{,}5m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}7787819 \end{Bmatrix} \right]^{\frac{1}{2}}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 0{,}7787819 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}442530/\sqrt{m} \\ 0{,}344606/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$\left\{\phi\right\}_2 = \frac{1}{\left[\left\{u\right\}_2^T \left[m\right] \left\{u\right\}_2\right]^{1/2}} \left\{u\right\}_2 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1 \\ -5,778761\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}4,5 & 0 \\ 0 & m\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1 \\ -5,778761\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1 \\ -5,778761\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,162448/\sqrt{m} \\ -0,938748/\sqrt{m}\end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base modal:

$$\left[I\right]\left\{\ddot{\eta}(t)\right\} + \left[\Omega^2\right]\left\{\eta(t)\right\} = \left[\Phi\right]^T \left\{f(t)\right\} \quad \therefore$$

$$\therefore \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t)\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}3,64\,073^2 \frac{K}{m} & 0 \\ 0 & 1,474126^2 \frac{K}{m}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\eta_1(t) \\ \eta_2(t)\end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix}0,442530/\sqrt{m} & 0,162448/\sqrt{m} \\ 0,344606/\sqrt{m} & -0,938748/\sqrt{m}\end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix}10\,m(t) \\ 0\end{Bmatrix} \quad (=$$

$$(= \begin{bmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t)\end{Bmatrix} + \begin{bmatrix}0,846073^2 \frac{K}{m} & 0 \\ 0 & 1,474126^2 \frac{K}{m}\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}\eta_1(t) \\ \eta_2(t)\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,442530/\sqrt{m} \times 10\,m(t) \\ 0,162448/\sqrt{m} \times 10\,m(t)\end{Bmatrix}$$

e)

Exercício 3

Comprimento : $\ell = 1{,}25$ m
Simplesmente apoiada
Módulo de elasticidade longitudinal : $E = 210$ GPa
Módulo de elasticidade transversal : $G = 80$ GPa
Massa volúmica : $\rho = 7800$ kg/m^3
Secção circular

a) Diâmetro do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 75 Hz :

$$f_1 = 75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\beta_1 \ell)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E I}{\rho A \ell^4}} = 75 \therefore$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{2\pi} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times d^4}{7800 \times \frac{\pi}{4} d^2 \times 1{,}25^4}} = 75 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 0{,}057512 \text{ m}$$

b) Para um problema de flexão (4ª ordem) a função de aproximação tem de ser derivável pelo menos 2 vezes (metade da ordem do problema).

$$V(x) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

$$\frac{d}{dx} V(x) = \frac{\delta \pi}{\ell} \cos \frac{\pi x}{\ell}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} V(x) = -\frac{\delta \pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}$$

Condições geométricas :

$$V(x)\Big|_{x=0} = 0 \quad \therefore \quad V(0) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi \times 0}{\ell} = 0 \qquad \text{Verifica}$$

$$V(x)\Big|_{x=\ell} = 0 \quad \therefore \quad V(\ell) = \delta \operatorname{sen} \frac{\pi \ell}{\ell} = 0 \qquad \text{Verifica}$$

c) Como verificado na alínea anterior, a função de aproximação é admissível.

Então:

$$V_{máx} = \frac{1}{2}\int_0^{\ell} E\,I(x)\left[\frac{d^2}{dx^2}v(x)\right]^2 dx + V_{cfn} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\ell} E\,I\left[-\frac{\delta\pi^2}{\ell^2}\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell}\right]^2 dx + \frac{1}{2}K\times\left[v(\ell/2)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2}EI\left[\frac{\delta^2\pi^4}{2\ell^3}\right] + \frac{1}{2}\times K\times\delta^2 =$$

$$= \frac{EI\,\delta^2\pi^4}{4\ell^3} + \frac{\alpha\,EI\,\delta^2}{2\ell}$$

$$T_{máx} = \omega^2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\rho A(x)\left[v(x)\right]^2 dx + T^*_{cfn}\right] =$$

$$= \omega^2\left[\frac{1}{2}\int_0^{\ell}\rho A(x)\left[\delta\operatorname{sen}\frac{\pi x}{\ell}\right]^2 dx + 0\right] =$$

$$= \omega^2\left[\frac{1}{2}\rho A\,\frac{\delta^2\ell}{2}\right] =$$

$$= \omega^2\left[\frac{\rho A\delta^2\ell}{4}\right]$$

$$T^* = \frac{T_{máx}}{\omega^2} = \frac{\rho A\delta^2\ell}{4}$$

$$\omega^2 = \frac{V_{máx}}{T^*} = \frac{\frac{EI\,\delta^2\pi^4}{4\ell^3} + \frac{\alpha\,EI\,\delta^2}{2\ell}}{\frac{\rho A\delta^2\ell}{4}} = \frac{EI\pi^4}{\ell^4\rho A} + \frac{2\alpha\,EI}{\rho A\ell}$$

Então:

$$\omega = \left[\frac{EI\pi^4}{\ell^4\rho A} + \frac{2\alpha\,EI}{\rho A\ell}\right]^{1/2}$$