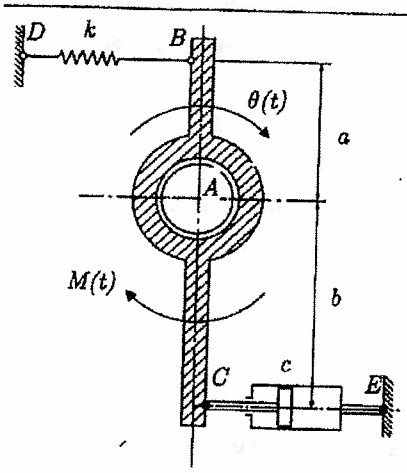


1) (4 val.) O corpo representado na figura oscila em torno do ponto A, sendo o seu movimento controlado por uma mola linear de rigidez k e um amortecedor viscoso de constante c.

Num ensaio em regime livre, o sistema responde com uma vibração livre amortecida de frequência igual a 9 Hz, medindo-se os seguintes valores da vibração:

- 1ª oscilação: $\theta_1 = 8°$;
- 3ª oscilação: $\theta_2 = 4°$.

a) (30%) Estabelecer a equação diferencial do movimento.

Sabendo que a rigidez da mola é de 860 Nm^{-1}, $a = 30$ mm e $b = 50$ mm, determinar:

b) (10%) o decremento logarítmico δ e a razão de amortecimento ξ;

c) (10%) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

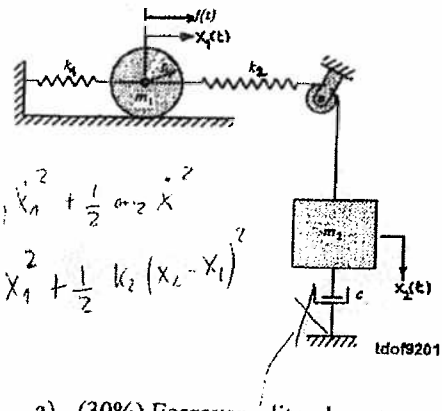
d) (10%) o momento de inércia I_A do corpo em relação ao eixo que passa pelo ponto A;

e) (10%) o valor da constante c do amortecedor;

Para uma solicitação harmónica provocada pelo momento aplicado em A, $M(t) = M_m \cos(\omega t)$, com $M_m = 0.1$ Nm, determinar:

f) (10%) a frequência de ressonância ω_r;

g) (20%) a(s) frequência(s) ω de excitação para a qual a amplitude de resposta vale $\Theta(\omega) = 10°$.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por um cilindro de raio r e massa m_1 que rola sem escorregar sobre uma superfície plana e que está ligado ao exterior por uma mola de rigidez k_1 e a uma massa m_2 por um cabo de rigidez k_2. A massa m_2 translada verticalmente e está ligada ao exterior por um amortecedor de tipo viscoso e de constante c.

No eixo do cilindro está aplicada uma solicitação $f(t)$.

O movimento do sistema a partir da posição de equilíbrio estático é descrito pelas coordenadas absolutas $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

a) (30%) Escrever, literalmente, as equações de movimento utilizando o formalismo de Lagrange.

Para o sistema não amortecido e para os valores seguintes:

$m_1 = \frac{2}{3}m$ $\quad m_2 = 3m$ $\quad r = 0.15$ m $\quad k_1 = 80$ N/m $\quad k_2 = 160$ N/m

b) (15%) Determinar as frequências naturais de vibração;

c) (15%) Determinar e comentar as formas naturais de vibração.

d) (10%) Exprimir as equações de movimento na base modal;

Para $m = 2$ kg.

e) (10%) Determinar o valor máximo das respostas $x_1(t)$ e $x_2(t)$ devido a uma força harmónica de amplitude F e de frequência $\omega = 8$ rad/s. Comentar o resultado.

3) (4 val.) A figura a) representa uma árvore (de máquina) de comprimento $\ell = 1.20$ m, de secção recta circular de diâmetro d, de área A, momento de 2ª ordem I e momento polar I_p. O material apresenta módulo de Young $E = 210$ GPa, módulo de elasticidade transversal $G = 81$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. Na extremidade $x = 0$, a árvore está encastrada para a flexão e livre em torção.

a) (30%) Dimensionar a recção recta da árvore de modo que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 40 Hz.

b) (15%) Determinar a frequência natural de vibração de torção.

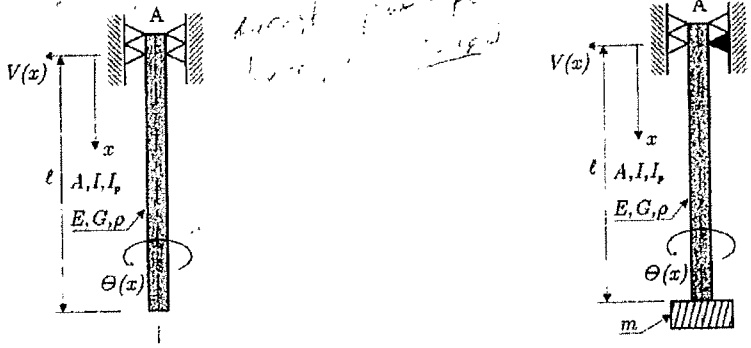
A figura b) representa a árvore com uma ferramenta de massa $m = \alpha\rho A\ell$ na extremidade $x = \ell$. Considerando o método da energia de Rayleigh e a função de aproximação da forma natural fundamental, $V(x) = \delta\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$,

c) (10%) discutir, justificando, a aplicabilidade da função de aproximação proposta para estimar a frequência natural de flexão;

d) (25%) estabelecer uma expressão para a frequência natural de flexão;

e) (10%) determinar o valor da frequência natural de flexão para m igual a 25% da massa da árvore;

f) (10%) Indicar, justificando, uma função de aproximação adequada para estimar a frequência fundamental de torção.

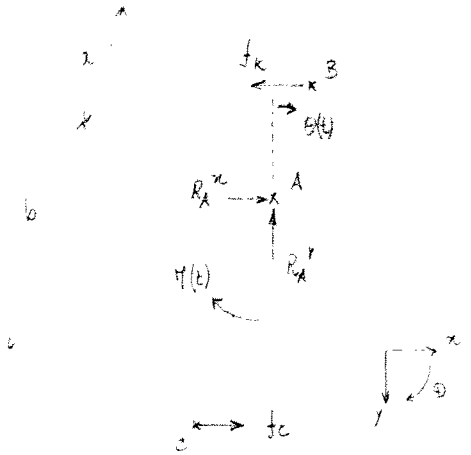


FEUP, 30 de Março de 2011
José Dias Rodrigues

Exame de Conclusão do Curso de 30-03-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

Quando o sistema é perturbado:



$f_d = 9\,Hz$

1º ressalto: $\theta_1 = 8°$

2º ressalto: $\theta_2 = 4°$

$f_k = a\,k\,\theta$

$f_c = b\,c\,\dot{\theta}$

Frequência de vibração amortecida:

$$\omega_d = 2\pi f \quad \Leftrightarrow \quad \omega_d = 2\pi \times 9 \quad \Leftrightarrow \quad \omega_d = 18\pi \ rad/s$$

a) Equação diferencial do movimento:

$$\sum \vec{M}_A = \vec{K}_A$$

$$\Leftrightarrow -a \times a\,k\,\theta - b \times b\,c\,\dot{\theta} + M(t) = J\ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J\ddot{\theta} + c\,b^2\dot{\theta} + k\,a^2\theta = M(t)$$

b) Decremento logarítmico, δ:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta_{t1}}{\theta_{t2}} \quad \Leftrightarrow \quad \delta = \frac{1}{2} \ln \frac{8}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \delta = 0{,}346574$$



Ratio de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0,346574}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0,346574^2}} \quad (=) \quad \zeta = 0,055075$$

c) Frequência natural angular não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \omega_d \times \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \quad \therefore \quad \omega_n = 18\pi \times \frac{1}{\sqrt{1-0,055075^2}} \quad (=) \quad \omega_n = 56,634627 \ rad/s$$

d) Momento de inércia no ponto A, J_A:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad (=) \quad \omega_n^2 = \frac{K_{eq}}{m_{eq}} \quad \therefore \quad \omega_n^2 = \frac{K a^2}{J_A} \quad (=)$$

$$(=) \quad 56,634627^2 = \frac{860 \times 0,030^2}{J_A} \quad (=) \quad J_A = 2,413 \times 10^{-4} \ kg\,m^2$$

e) Constante de amortecimento:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\, m_{eq}\, \omega_n} \quad (=) \quad \zeta = \frac{c_{eq}}{2 \frac{K_{eq}}{\omega_n^2} \omega_n} \quad (=) \quad \zeta = \frac{c_{eq} \times \omega_n}{2 \times K_{eq}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \zeta = \frac{c\, b^2 \times 56,634627}{2 \times K a^2} \quad (=) \quad 0,055075 = \frac{c \times 0,050^2 \times 56,634627}{2 \times 860 \times 0,030^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad c = 0,602148 \ Ns/m$$

f) Frequência de ressonância, ω_r:

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_r = 56,634627 \times \sqrt{1 - 2 \times 0,055075^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad \omega_r = 56,462578 \ rad/s$$

g) Amplitude de resposta $B(\omega) = 10°$:

$$B(\omega) = \mu\, B\lambda \quad (=) \quad \frac{10 \times \pi}{180} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{10 \times \pi}{180} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2 \times 0{,}055075 \times \beta)^2}} \times \frac{0{,}1}{860 \times 0{,}03^2} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \beta = 0{,}511756 \quad \wedge \quad \beta = 1{,}313763$$

As frequências ω de excitação para as quais a amplitude vale $\Theta(\omega) = 10°$ são:

$$\frac{\omega_1}{\omega_n} = 0{,}511756 \quad \wedge \quad \frac{\omega_2}{\omega_n} = 1{,}313763 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\omega_1}{56{,}634637} = 0{,}511756 \quad \wedge \quad \frac{\omega_2}{56{,}634637} = 1{,}313763 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega_1 = 28{,}983110 \ rad/s \quad \wedge \quad \omega_2 = 74{,}404477 \ rad/s$$

Exame de Conclusão de Curso de 30-03-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

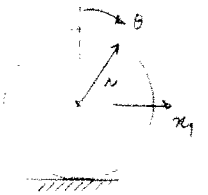
a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x_1$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{x}_1$
$q_2 = x_2$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{x}_2$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times J_1 \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} m_1 r^2 \times \frac{\dot{x}_1^2}{r^2} + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2 =$

$= \frac{3}{4} m_1 \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}_2^2$



$x_1 = r\theta$
$\dot{x}_1 = r\dot{\theta}$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times K_1 \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times K_2 \times (x_1 - x_2)^2 =$

$= \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 (x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) =$

$= \frac{1}{2} K_1 x_1^2 + \frac{1}{2} K_2 x_1^2 - K_2 x_1 x_2 + \frac{1}{2} K_2 x_2^2$

Função de dissipação de Rayleigh: $\mathcal{F} = \frac{1}{2} \times c \times \dot{x}_2^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f(t)\, \delta x_1$

$Q_1 = f(t) \frac{dx_1}{dx_1} + 0 = f(t)$

$Q_2 = 0 + 0 = 0$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1$ $\quad \frac{\partial V}{\partial x_1} = K_1 x_1 + K_2 x_1 - K_2 x_2$

$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \dot{x}_2} = c\dot{x}_2$ $\quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial V}{\partial \dot{x}_2}\right) = m_2 \ddot{x}_2$ $\quad \frac{\partial V}{\partial x_2} = -K_2 x_1 + K_2 x_2$

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m_1 \ddot{x}_1 + K_1 x_1 + K_2 x_1 - K_2 x_2 = f(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 - K_2 x_1 + K_2 x_2 + c\dot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_1 + K_2 & -K_2 \\ -K_2 & K_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Tendo em conta os valores numéricos:

$$\begin{bmatrix} 3/2 \times 1/2 \times m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequências naturais de vibração:

$$\left| \begin{bmatrix} 240 - \omega^2 \times m & -160 \\ -160 & 160 - \omega^2 \times 3m \end{bmatrix} \right| = 0 \Leftrightarrow \omega_1 = \frac{3,917724}{\sqrt{m}} \quad \vee \quad \omega_2 = \frac{16,672875}{\sqrt{m}} \quad [rad/s]$$

c) Formas naturais de vibração:

$$(-160)\, u_1 + (160 - \omega_1^2 \times 3m)\, u_2 = 0 \;\therefore$$

$$\therefore (-160)\, u_1 + \left(160 - \frac{3,917724^2}{m} \times 3 \times m\right) u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_2 = 1,404071\, u_1 \Rightarrow \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1,404071 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Fase}$$

$$(-160)\, u_1 + (160 - \omega_2^2 \times 3m)\, u_2 = 0 \;\therefore$$

$$\therefore (-160)\, u_1 + \left(160 - \frac{16,672875^2}{m} \times 3 \times m\right) u_2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow u_2 = -0,237405\, u_1 \Rightarrow \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0,237405 \end{Bmatrix} \leftarrow \text{Oposição de fase}$$

d)

Exame de Conclusão de Curso de 30-03-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 3

Comprimento: $\ell = 1{,}20$ m
Secção circular
Módulo de Young: $E = 210$ GPa
Módulo de elasticidade transversal: $G = 80$ GPa
Massa volúmica: $\rho = 7800$ kg/m^3
Para $x = 0$: encastrada à flexão e livre em torção

a) O diâmetro da secção recta, nas condições do problema é:

$$f_1 = 40 \text{ Hz} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\beta_1 \ell)^2 \times \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{A\rho\ell^4}} = 40 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1{,}8751^2 \times \frac{1}{2\pi} \times \sqrt{\frac{210\times10^9 \times \frac{\pi}{64} d^4}{7800 \times \frac{\pi}{4} d^2 \times 1{,}2^4}} = 40 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = 0{,}079351 \text{ m}$$

O diâmetro da secção recta tem de ser superior a 0,079351 m para que a frequência natural fundamental seja superior a 40 Hz

b) A frequência natural de vibração de torção, para um veio com as condições de fronteira à torção livre-livre é dada por:

$$\omega_1 = \frac{1\pi}{\ell}\sqrt{\frac{G}{\rho}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \frac{\pi}{1{,}20} \times \sqrt{\frac{80\times10^9}{7800}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = 8384{,}290527 \text{ rad/s}$$

c) Função de aproximação: $V(x) = \delta\left(\frac{x}{\ell}\right)^2$

A função tem de ser derivável pelo menos 2 vezes, pois é metade da ordem do problema (4ª ordem):

$$\frac{d}{dx}V(x) = \frac{2\delta x}{\ell^2} \quad ; \quad \frac{d^2}{dx^2}V(x) = \frac{2\delta}{\ell^2}$$

Condições de fronteira geométricas (têm de ser verificadas):

$$v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \left(\frac{0}{\ell}\right)^2 = 0 \quad (=) \quad 0 = 0$$

$$\frac{d}{dx} v(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{2\delta 0}{\ell} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$$

Condições de fronteira naturais:

$$EI \frac{d^2}{dx^2} v(\ell) = m \times \frac{d^2}{dt^2} v(\ell)$$

A função de aproximação é aplicável

d) Método da energia de Rayleigh:

A função de aproximação é válida.

$$V_{máx} = \frac{1}{2} \int_0^\ell EI(x) \left[\frac{d^2}{dx^2} v(x)\right]^2 dx + V_{cfm} =$$

$$= \frac{1}{2} EI \int_0^\ell \left(\frac{2\delta}{\ell^2}\right)^2 dx + 0 = \frac{2 EI \delta^2}{\ell^3}$$

$$T^* = \frac{T_{max}}{\omega^2} = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A(x) \left[v(x)\right]^2 dx + T^*_{cfm} =$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \int_0^\ell \left[\delta \frac{x^2}{\ell^2}\right]^2 dx + \frac{1}{2} \times m \times \left(\frac{\delta \ell^2}{\ell^2}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \frac{\delta^2 \ell}{5} + \frac{1}{2} \times \alpha \rho A \ell \delta^2 =$$

$$= \frac{1}{10} \rho A \delta^2 \ell + \frac{1}{2} \alpha \rho A \ell \delta^2$$

$$\omega^2 = \frac{\frac{2 EI \delta^2}{\ell^3}}{\frac{1}{10} \rho A \delta^2 \ell + \frac{1}{2} \alpha \rho A \ell \delta^2} = \frac{20 EI}{\lambda \ell^4 \rho (5\alpha + 1)}$$

e) Massa da árvore: $M_{arv} = \frac{\pi \times d^2}{4} \times \ell \times \rho = \frac{\pi}{4} \times 0{,}079351^2 \times 1{,}2 \times 7800 = 46{,}288226$ kg

Massa da ferramenta: $m = 0{,}25 \times M_{arv} = 0{,}25 \times 46{,}288226 = 11{,}572057$ kg

Então: $$\omega = \left[\frac{2 \times 210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times 0{,}079351^4}{\frac{1}{10} \times 7800 \times \frac{\pi}{4} \times 0{,}079351^2 \times 1{,}2 + \frac{1}{2} \times 11{,}572057}\right]^{\frac{1}{2}} = 280{,}148222 \text{ rad/s}$$