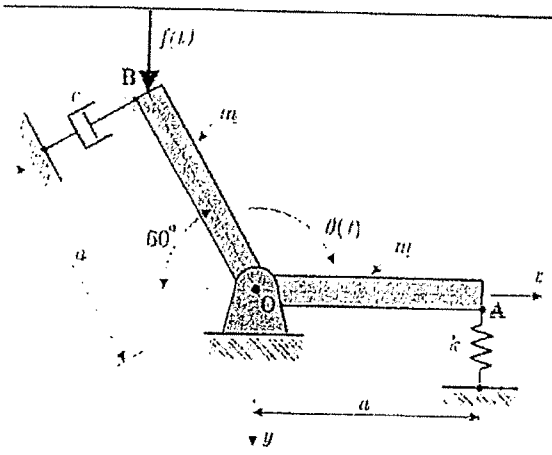


1) (7 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma barra rígida AOB formada pelos tramos AO e OB. Cada um dos tramos apresenta uma massa m e um comprimento a. A barra AOB está ligada ao exterior através de uma articulação no ponto O. No ponto A está ligada a uma mola linear elástica de constante de rigidez k e no ponto B a um amortecedor viscoso de constante c. Na posição de equilíbrio estático, o tramo OA encontra-se na horizontal e, a partir dessa posição de referência, o mecanismo efectua pequenas oscilações $\theta(t)$.

a) (20%) Estabelecer a equação diferencial de movimento;

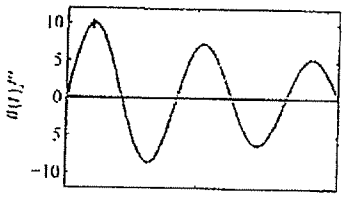
Para a aplicação numérica seguinte,

$k = 30\times10^3\,\mathrm{N/m}$, $c = 20\,\mathrm{Ns/m}$, $a = 0.5\,\mathrm{m}$, $m = 2.0\,\mathrm{kg}$,

determinar:

b) (10%) a razão de amortecimento e a frequência natural de vibração amortecida.

Na posição de equilíbrio estático, a barra recebe um impulso que lhe provoca o movimento de resposta $\theta(t)$ representado na figura ao lado, atingindo um valor máximo de $10°$.



Determinar:

c) (10%) o tempo necessário para atingir a resposta máxima igual a $10°$;

d) (10%) as condições iniciais provocadas pelo impulso;

e) (10%) a energia dissipada até ao instante em que a resposta atinge o valor máximo de $10°$.

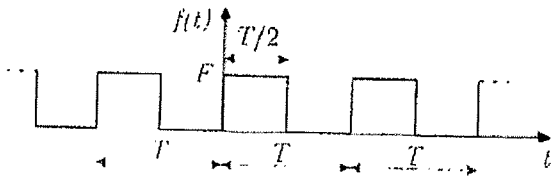
Para uma solicitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$, com $F = 20\,\mathrm{N}$ e $\omega = 20\,\mathrm{Hz}$, determinar:

f) (10%) a frequência de ressonância do sistema;

g) (15%) a componente y da reacção estacionária em O, $R_O^y(t)$;

Para a solicitação periódica representada na figura abaixo, com $T = 0.12\,\mathrm{s}$, determinar, justificando,

h) (15%) uma estimativa representativa da resposta do sistema considerando apenas 2 termos da série de Fourier.



2) (5 val.) A barra de comprimento $\ell = 2$ m representada na figura pode rodar em torno do ponto O e está ligada a um conjunto mola/amortecedor no ponto A. A massa da barra é $m = 30$ kg, a rigidez da mola é $k = 5 \times 10^4$ N/m e a constante de amortecimento é $c = 100$ Ns/m. Um deslocamento harmónico $s(t) = S\cos\omega t$, com $\omega = 150$ rad/s, é imposto ao ponto B do conjunto mola/amortedor.

Determinar:

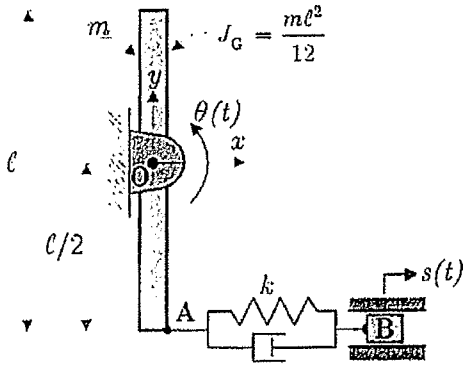
a) (30%) a equação de movimento do sistema:

b) (20%) a amplitude S da excitação harmónica $s(t)$ que provoca uma rotação com amplitude $\frac{\pi}{50}$ rad;

c) (25%) a força transmitida no ponto A.

Para $c = 0$, sistema não amortecido, determinar:

d) (25%) o(s) valor(es) da constante de rigidez k para que a amplitude de oscilação no ponto A seja inferior à do sistema amortecido anterior.

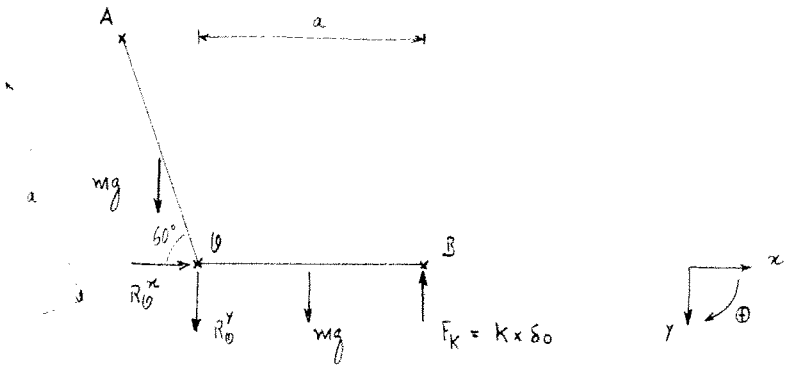


FEUP, 29.04.2011
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

Exame de 1ª Prova de Avaliação de 29-04-2011 — Estudo para fins de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

a) Quando o sistema encontra-se na sua posição de equilíbrio estático temos:

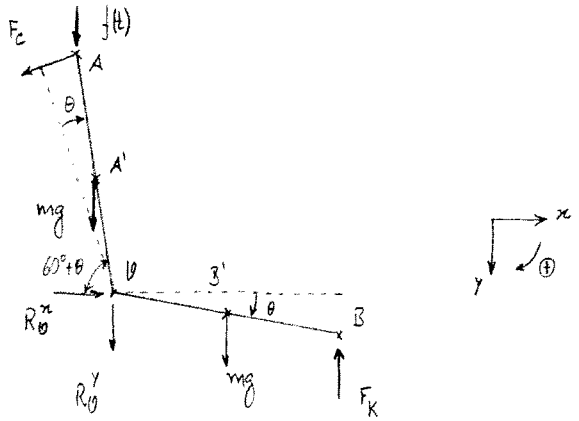


$$\Sigma \vec{F}^x = \vec{0} \Leftrightarrow R_{0x} = 0$$

$$\Sigma \vec{F}^y = \vec{0} \Leftrightarrow mg + mg + R_{0y} + F_K = 0$$

$$\Sigma \vec{M}_0 = \vec{0} \Leftrightarrow -\frac{a}{2} \times \cos 60° \times mg + \frac{a}{2} \times mg - a \times K \times \delta_0 = 0$$

Quando perturbamos o sistema temos:



$$\Sigma \vec{M}_0 = \vec{0} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \vec{OA} \times \vec{F_c} + \vec{OA} \times \vec{f(t)} + \vec{OA} \times \vec{mg} + \vec{OB} \times \vec{mg} + \vec{OB} \times \vec{F_K} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -a \times ac\dot{\theta} - a \times \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \times f(t) - \frac{a}{2} \times \cos\left(\frac{\pi}{3} + \theta\right) \times mg + \frac{a}{2} \cos\theta \times mg -$$

$$- a \times \cos\theta \times (K_0\theta + K\delta_0) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ca^2\ddot{\theta} - a \times \cos\frac{\pi}{3} \times f(t) - \frac{a}{2} \times \cos\frac{\pi}{3} \times mg + \frac{a}{2} mg - a^2 K\theta - a K\delta_0 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -ca^2\ddot{\theta} - a^2 K\theta - a\cos\frac{\pi}{3} f(t) = 0$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K}_O = \vec{K}_G + \cancel{\vec{\omega}_G \times \vec{Q}_G}^{\,=0} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ J_O \ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

Equação diferencial do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O$$

$$\therefore -ca^2\dot{\theta} - Ka^2\theta - a\cos\tfrac{\pi}{3} f(t) = J_O \ddot{\theta} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; J_O \ddot{\theta}(t) + ca^2\dot{\theta}(t) + Ka^2\theta(t) = -\tfrac{a}{2} f(t)$$

O momento de inércia J_O é dado por:

$$J_O = J_{G_1} + m_1 \times \overline{OG_1}^2 + J_{G_2} + m_2 \times \overline{OG_2}^2 =$$

$$= \frac{1}{12} \times m \times a^2 + m \times \frac{a^2}{2^2} + \frac{1}{12} \times m \times a^2 + m \times \frac{a^2}{2^2} =$$

$$= \frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 + \frac{1}{12} ma^2 + \frac{1}{4} ma^2 =$$

$$= \frac{8}{12} ma^2 = \frac{2}{3} ma^2$$

b) Frequência natural de vibração não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{30000 \times 0{,}5^2}{\frac{2}{3} \times 2 \times 0{,}5^2}} = 150 \text{ rad/s}$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{C_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{20 \times 0{,}5^2}{2 \times \frac{2}{3} \times 2 \times 0{,}5^2 \times 150} = 0{,}05$$

Frequência natural de vibração amortecida, ω_d:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 150 \times \sqrt{1 - 0{,}05^2} = 149{,}812383 \text{ rad/s}$$

c) O impulso recebido pela barra é equivalente a uma velocidade inicial $\dot{\theta}_0$ diferente de zero e θ_0 igual a zero. Então:

$$\theta_0 = 0$$

$$\dot{\theta}_0 \neq 0$$

O instante em que a resposta é máxima, pela primeira vez, isto é, $\theta = 10°$, é dada por:

$$t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{\omega_d}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) + (n-1)\pi + \phi\right] \quad \wedge \quad n = 1$$

Onde o valor de ϕ é:

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_d\,\theta_0}\right) \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1}\left(\frac{\dot{\theta}_0 + 0}{0}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \phi = \frac{\pi}{2}$$

Então, o instante em que é atingida a resposta máxima de 10° é:

$$t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = \frac{1}{149,812383}\left[\tan^{-1}\left(-\frac{0,05}{\sqrt{1-0,05^2}}\right) + (1-1)\pi + \frac{\pi}{2}\right] \quad \wedge \quad n = 1 \quad (=)$$

$$(=) \quad t\Big|_{\dot{\theta}(t)=0} = 0,010151 \text{ s}$$

d) A constante A é obtida através da equação da resposta livre do sistema sub-amortecido:

$$\theta(t) = A\, e^{-\zeta\omega_n t}\cos\left(\omega_d t - \phi\right)$$

E para o instante $t = 0,010151$ s, ficando então:

$$\frac{10\times\pi}{180} = A \times e^{-0,05\times 150\times 0,010151} \times \cos\left(149,812383\times 0,010151 - \frac{\pi}{2}\right) \quad (=)$$

$$(=) \quad A = 0,188576$$

O valor de $\dot{\theta}_0$ é obtido pela expressão da constante A:

$$A = \left[\left(\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\overbrace{\theta_0}^{=0}}{\omega_d}\right)^2 + \overbrace{\theta_0^2}^{=0}\right]^{1/2} \quad \therefore \quad 0,188576 = \frac{\dot{\theta}_0}{149,812383} \quad (=) \quad \dot{\theta}_0 = 28,251020 \text{ rad/s}$$

Já o valor de θ_0 sabemos desde as alíneas anteriores que $\theta_0 = 0$.

e) No instante $t=0\,s$ temos:

$$E(t=0) = E_c(t=0) + E_p(t=0) =$$

$$= \frac{1}{2} \times m_{eq} \times \dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2} \times K_{eq} \times \theta_0^2 \quad (\theta_0 = 0) =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times m \times a^2 \times 28{,}251020^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times 2 \times 0{,}5^2 \times 28{,}251020^2 =$$

$$= 133{,}020022 \ J$$

No instante $t = 0{,}010151\,s$ temos:

$$E(t=0{,}010151) = E_c(t=0{,}010151) + E_p(t=0{,}010151) =$$

$$= \frac{1}{2} \times m_{eq} \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times K_{eq} \times \theta^2 \quad (m_{eq} = 0) =$$

$$= \frac{1}{2} \times K \times a^2 \times \left(\frac{10 \times \pi}{180}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \times 30 \times 10^3 \times 0{,}5^2 \times \left(\frac{10\pi}{180}\right)^2 =$$

$$= 114{,}231532 \ J$$

A energia dissipada até ao instante $t = 0{,}010151\,s$ é:

$$E_{dissipada} = 133{,}020022 - 114{,}231532 = 18{,}78849 \ J$$

f) Frequência de ressonância do sistema:

$$\omega_d = \omega_n \sqrt{1 - 2\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 150 \times \sqrt{1 - 2 \times 0{,}05^2} \quad (=) \quad \omega_d = 149{,}62453 \ rad/s$$

g) Razão de frequências, β:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_N} \quad \therefore \quad \beta = \frac{2\pi \times 20}{150} = 0,837758$$

Amplitude da resposta, $\mathcal{B}(\omega)$:

$$\mathcal{B}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \quad (=)$$

$$(=) \quad \mathcal{B}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \frac{-\frac{a}{2} F}{K a^2} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \mathcal{B}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-0,837758^2)^2 + (2 \times 0,05 \times 0,837758)^2}} \times \frac{-0,5 \times 20}{2 \times 30 \times 10^3 \times 0,5^2} \quad (=)$$

$$(=) \quad \mathcal{B}(\omega) = -0,002153 \text{ rad}$$

Deslocamento, ϕ:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0,05 \times 0,837758}{1 - 0,837758^2} = 0,272912 \text{ rad}$$

Fazendo o equilíbrio na vertical, temos:

$$\Sigma \vec{F_y} = \vec{0} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \Lambda_{\theta}^{y}(t) + f_k(t) - f_c(t) \times \cos 60° - f(t) = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad \Lambda_{\theta}^{y}(t) + Ka\,\theta(t) - ca\,\dot{\theta}(t) \cos \pi/3 - F \cos \omega t = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad \Lambda_{\theta}^{y}(t) = F \cos \omega t + ca \cos \pi/3 \times (-\mathcal{B}(\omega)\,\omega\, \mathrm{sen}(\omega t - \phi)) - Ka\,\mathcal{B}(\omega) \cos(\omega t - \phi) \quad (=)$$

$$(=) \quad \Lambda_{\theta}^{y}(t) =$$

g) Equilíbrio de forças na vertical:

$$\Sigma \vec{F_y} = \cancel{\vec{0}} \quad \therefore$$

$$\therefore \vec{r_O^y}(t) + \vec{f_K}(t) + \vec{f_c'}(t) + \vec{f}(t) = \cancel{\vec{0}} \; m_1 \vec{a}_{G_{1O}} + m_2 \vec{a}_{G_{2O}}$$

$$\therefore r_O^y(t) + f_K(t) - f_c(t) \times \cos 60^\circ - f(t) = 0 \, m_1 a^y_{G_{1O}} + m_2 a^y_{G_{2O}} \qquad \text{(equação 1)}$$

Onde as componentes da equação anterior são:

$$\theta(t) = \theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$
$$\Rightarrow \ddot{\theta} = -\omega^2 \theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

$$r_O^y(t) = R_O^y \cos(\omega t - \phi)$$

$$f_K(t) = K a \, \theta(t) = K a \, \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi) = K a \, \mu \, \Theta_s \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= K a \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= \cancel{K} \cancel{a} \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{-\frac{\cancel{a}}{2} F}{\cancel{K} \cancel{a^2}} \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{-F}{2} \cos(\omega t - \phi)$$

$$f_c(t) = c a \, \dot{\theta}(t) = -c a \, \omega \, \Theta(\omega) \operatorname{sen}(\omega t - \phi) =$$

$$= -c \cancel{a} \omega \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{-\frac{\cancel{a}}{2} F}{K \cancel{a^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) =$$

$$= c\omega \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \frac{F}{2K} \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$f(t) = F \cos \omega t$$

Razão de frequência, β:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{20 \times 2\pi}{150} = 0{,}837758$$

Desfasamento, ϕ:

$$\phi = \tan^{-1} \frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1} \frac{2 \times 0{,}05 \times 0{,}837758}{1 - 0{,}837758^2} = 0{,}273912 \text{ rad}$$

Voltando à equação 1, temos:

$$x_0^{\gamma}(t) = F\cos\omega t + c\omega \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}} \frac{F}{2k} \operatorname{sen}(\omega t - \phi) \times \cos 60° -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}} \frac{-F}{2} \cos(\omega t - \phi)$$

b) Solicitação:

$$f(t) = \begin{cases} F, & 0 < t < T/2 \\ 0, & T/2 < t < T \end{cases}$$

Período: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

Coeficientes de Fourier: $F_0 = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\,dt =$

$$= \frac{2}{T}\left[Ft\Big|_0^{T/2} + 0\Big|_{T/2}^{T} \right] = \frac{2}{T}\left[F \times \frac{T}{2} - 0 \right] = F$$

$$A_1 = \frac{2}{T}\int_0^{T/2} F\cos(\omega t)\,dt + \frac{2}{T}\underbrace{\int_{T/2}^{T} 0 \times \cos(\omega t)\,dt}_{=0} =$$

$$= \frac{2}{T} F\left[\frac{1}{\omega}\operatorname{sen}(\omega t)\right]_0^{T/2} = \frac{2}{T} F\left(\operatorname{sen}(\omega T/2) \times \left(\frac{1}{\omega}\right)\right) = \frac{2F}{T\omega}\operatorname{sen}\left(\omega\frac{T}{2}\right) \times \frac{1}{\omega} =$$

$$= \frac{2 \times 20}{0{,}12 \times 20 \times 2\pi}\operatorname{sen}\left(20 \times 2\pi \times \frac{0{,}12}{2}\right) \times \frac{1}{20 \times 2\pi} = 2{,}52\,27\,56$$

$$B_1 = \frac{2}{0{,}06}\int_0^{0{,}06} f(t)\operatorname{sen}(\omega t)\,dt = 1{,}8329$$

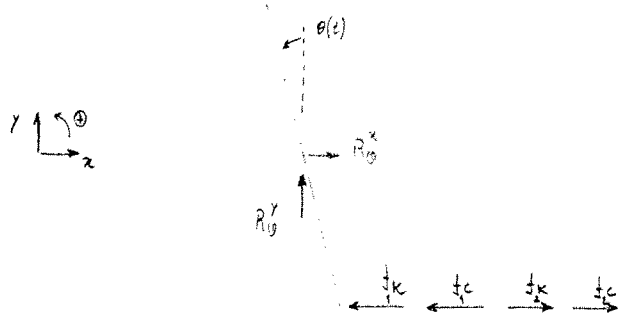
$$A_2 = \frac{2}{0{,}12}\left[\int_0^{0{,}06} f(t)\cos(2\omega t)\,dt + 0\right] = 0{,}7796$$

$$B_2 = \frac{2}{0{,}12}\left[\int_0^{0{,}06} f(t)\operatorname{sen}(2\omega t)\,dt + 0\right] = 2{,}3993$$

Exame de 1ª Prova de Avaliação de 29-04-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Quando o sistema é perturbado:



$f_{1K} = K \frac{\ell}{2} \theta$

$f_{2K} = K s$

$f_{1C} = C \frac{\ell}{2} \dot{\theta}$

$f_{2C} = C \dot{s}$

Equação do movimento do sistema:

$$\Sigma \vec{M}_0 = \vec{K}_0 \quad \therefore$$

$$\therefore -K \frac{\ell}{2} \theta \times \frac{\ell}{2} - C \frac{\ell}{2} \dot{\theta} \times \frac{\ell}{2} + \frac{\ell}{2} \times K s + \frac{\ell}{2} C \dot{s} = \frac{1}{12} \times m \times \ell^2 \ddot{\theta} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; -K \frac{\ell^2}{4} \theta - C \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta} + \frac{\ell}{2} K s + \frac{\ell}{2} C \dot{s} = \frac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; \frac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta} + C \frac{\ell^2}{4} \dot{\theta} + K \frac{\ell^2}{4} \theta = \frac{\ell}{2} K s + \frac{\ell}{2} C \dot{s}$$

Substituindo valores, temos:

$$\frac{1}{12} \times 30 \times 2^2 \ddot{\theta} + 100 \times \frac{2^2}{4} \dot{\theta} + 50000 \times \frac{2^2}{4} \theta = \frac{2}{2} \times 50000 \times s + \frac{2}{2} \times 100 \times \dot{s} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; 10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = 50000 s(t) + 100 \dot{s}(t)$$

b) Como o deslocamento imposto é harmónico, então, a equação do movimento vem:

$$s(t) = S \cos \omega t = S \cos 150 t$$

$$\dot{s}(t) = -S \omega \operatorname{sen} \omega t = -150 S \operatorname{sen} 150 t$$

$$10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = 50000 S \cos \omega t - 100 \omega S \operatorname{sen} \omega t \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; 10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = S \sqrt{50000^2 + (150 \times 100)^2} \cos(150 t + \gamma) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; 10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = S \times 52201{,}532545 \cos(150 t + \gamma) \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \; 10 \ddot{\theta}(t) + 100 \dot{\theta}(t) + 50000 \theta(t) = 52201{,}532545 \, S \cos(150 t + 0{,}291457)$$

Onde o valor de γ é:

$$\gamma = \tan^{-1}\frac{\omega c}{k} = \tan^{-1}\frac{150 \times 100}{50000} = 0{,}291457 \text{ rad}$$

Frequência natural não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{50000}{10}} = 70{,}710678 \text{ rad/s}$$

Razão de frequência, β:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad \beta = \frac{150}{70{,}710678} = 2{,}121320$$

Razão de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\, m_{eq}\, \omega_n} = \frac{100}{2 \times 10 \times 70{,}710678} = 0{,}070711$$

A amplitude S da excitação harmónica $s(t)$ que provoca uma rotação com amplitude $\pi/50$ rad é:

$$\Theta(\omega) = S\,\frac{\sqrt{1+(2\zeta\beta)^2}}{\sqrt{(1-\beta^2)^2+(2\zeta\beta)^2}} \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\pi}{50} = S\,\frac{\sqrt{1+(2\times 0{,}070711\times 2{,}121320)^2}}{\sqrt{(1-2{,}121320^2)^2+(2\times 0{,}070711\times 2{,}121320)^2}} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad S = 0{,}211409 \text{ m}$$

c) Pela equação do movimento, como todas as forças do sistema estão aplicadas sobre o ponto A, podemos então:

$$\tfrac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta}(t) + c\frac{\ell^2}{4}\dot{\theta}(t) + k\frac{\ell^2}{4}\theta(t) = \tfrac{\ell}{2} k s + \tfrac{\ell}{2} c \dot{s} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{12} m \ell^2 \ddot{\theta}(t) = \tfrac{\ell}{2}\underbrace{\left[k s + c\dot{s} - k\tfrac{\ell}{2}\theta - c\tfrac{\ell}{2}\dot{\theta} \right]}_{\text{Forças aplicadas no ponto A}} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{12} \times m \times \ell^2 \times \frac{2}{\ell} \times \ddot{\theta}(t) = K s + C\dot{s} - k\tfrac{\ell}{2}\theta - c\tfrac{\ell}{2}\dot{\theta}$$

Resolvendo o primeiro membro da equação anterior, temos a força transmitida ao ponto A:

$$\theta(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

$$\dot{\theta}(t) = -\omega\, \Theta(\omega) \operatorname{sen}(\omega t - \phi)$$

$$\ddot{\theta}(t) = -\omega^2\, \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

$$\overrightarrow{F_T^A} = \begin{Bmatrix} 1/12 \times m \times \ell \times 2 \;\; \ddot{\theta}(t) \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\overrightarrow{F_T^A} = 1/12 \times 30 \times 2 \times 2 \times \left[-150^2 \times \Theta(\omega) \times \cos(150t - \psi) \right] =$$

$$= -10 \times 150^2 \times \Theta(\omega) \times \cos(150t - \phi + \gamma) =$$

$$= -2{,}25 \times 10^5 \times \frac{\pi}{50} \times \cos\left(150t - \tan^{-1}\frac{2\zeta\beta}{1-\beta^2} + \tan^{-1}\frac{\omega c}{k}\right) =$$

$$= -4{,}5 \times 10^3\, \pi \times \cos\left(150t - \tan^{-1}\left(\frac{2 \times 0{,}070711 \times 2{,}121320}{1 - 2{,}121320}\right) + 0{,}291457\right) =$$

$$= -4{,}5 \times 10^3\, \pi \times \cos(150t + 0{,}5528877)$$

d) Para $c = 0$ temos que $\gamma = 0$.

Queremos que:

$$X_A(\omega) < \Theta(\omega) \times \ell/2 = \pi/50 \times \ell/2 = \frac{\ell\pi}{100}$$

Transmissibilidade absoluta:

$$TR_{abs} = \frac{X(\omega)}{Y} \quad \therefore \quad X(\omega) < TR_{abs} \cdot Y \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \frac{\ell\pi}{100} \times \frac{1}{5} < TR_{abs} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{\ell \times \pi}{100 \times 5} < \frac{1}{|1-\beta^2|} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{2 \times \pi}{100 \times 0{,}211409} < \frac{1}{|1-\beta^2|} \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \beta = 2{,}089181$$

Pela razão de frequência, β:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} \quad \therefore \quad 2{,}089181 = \frac{150}{\sqrt{\frac{k_{eq}}{1/3\, m \ell^2}}} \quad (\Leftrightarrow) \quad k_{eq} = 51550{,}203388 \ N/m$$

A constante k vale então :

$$K_{eq} = k\frac{l^2}{4} \quad \therefore \quad 51550,203388 = k \times \frac{l^2}{4} \quad \Leftrightarrow \quad k = 51550,203388 \ N/m$$