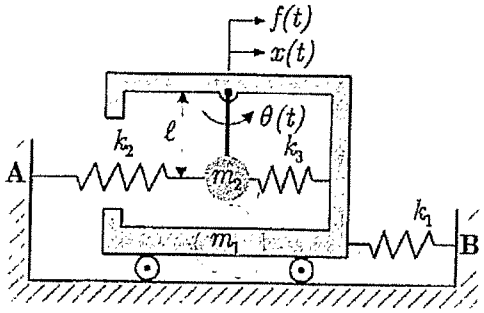


1) (6 val.) O sistema representado na figura é constituído por 2 corpos:

- corpo 1, uma carruagem de massa m_1 ligada ao exterior por uma mola de rigidez k_1 e ao corpo 2 através da mola de rigidez k_3;
- corpo 2, uma massa m_2 ligada ao exterior pela mola de rigidez k_2 e à carruagem pela mola de rigidez k_3, concentrada na extremidade de uma haste rígida de massa desprezável e de comprimento ℓ articulada à carruagem.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas $x(t)$ e $\theta(t)$. Na situação de equilíbrio estático, $x(t) = \theta(t) = 0$ e as molas não estão deformadas. As oscilações angulares $\theta(t)$ podem considerar-se 'pequenas'.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento do sistema são:

$$\begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5.0\times10^4 & 5.0\times10^3 \\ 5.0\times10^3 & 7.5\times10^3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (15%) Determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema.

c) (15%) Determinar o deslocamento angular $\theta(t)$ devido a uma excitação harmónica $f(t) = 500\cos(40t)$.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal com massas modais unitárias.

e) (15%) Para condições iniciais nulas, determinar o deslocamento angular $\theta(t)$ quando o sistema é sujeito a uma excitação $f(t)$ transiente do tipo:

$$f(t) = \begin{cases} 500\ \text{N} & 0 < t \le 0.07\,\text{s} \\ 0 & t > 0.07\,\text{s} \end{cases}$$

f) (15%) Determinar o limite superior da força transmitida ao apoio B para a excitação da alínea anterior.

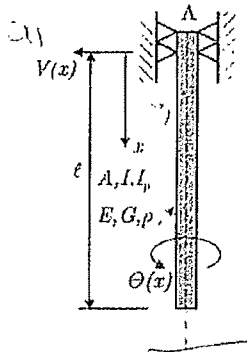
v.s.f.f.

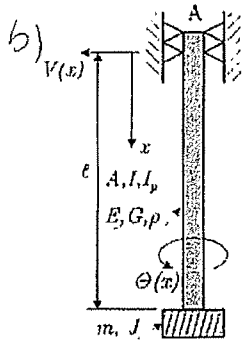
2) (6 val.) A figura a) representa uma árvore (de máquina) de comprimento $\ell = 0.5$ m, de secção recta circular de diâmetro d, de área A, momento de 2ª ordem I e momento polar I_p. O material apresenta módulo de Young $E = 210$ GPa, módulo de elasticidade transversal $G = 80$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. Na extremidade $x = 0$, a árvore está encastrada para a flexão e livre em torção.

a) (20%) Dimensionar a secção recta da árvore de modo que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 100 Hz.
b) (10%) Determinar a frequência natural de vibração de torção.

A figura b) representa a árvore com uma ferramenta de massa m e momento de inércia $J = J_{zz}$ na extremidade $x = \ell$. Considerando o método da energia de Rayleigh e a função de aproximação da forma natural fundamental, $V(x) = \delta\left(1 - \cos\frac{\pi}{2\ell}x\right)$,

c) (10%) discutir, justificando, a aplicabilidade da função de aproximação proposta para estimar a frequência natural de flexão do sistema árvore-ferramenta;
d) (25%) estabelecer uma expressão para a frequência natural de flexão (método de Rayleigh);
e) (25%) Considerando a solução geral para $\theta(x,t)$, estabelecer a equação de frequências naturais de torção do sistema árvore-ferramenta. Exprimir o resultado em termos de $\lambda = \frac{J}{\rho I_p \ell}$ e indicar o intervalo para a frequência fundamental de torção;
f) (10%) Indicar, justificando, uma função de aproximação adequada para estimar a frequência fundamental de torção do sistema árvore-ferramenta pelo método de Rayleigh.





NOTA 1: Secção circular: $I = \frac{\pi d^4}{64}$, $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$

NOTA 2

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} \qquad \int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a} \qquad \int x\sin ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)\cos ax \qquad \int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax$$

$$\int x\sin^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} \qquad \int x\cos^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

Feup, 13.06.2011
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

Exame de 2ª Prova de Avaliação de 13-06-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

a) Coordenadas generalizadas $q_1(t) = x(t)$ $\dot{q}_1(t) = \dot{x}(t)$
$q_2(t) = \theta(t)$ $\dot{q}_2(t) = \dot{\theta}(t)$

Energia cinética $T = E_c = \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times (\dot{x}_1 + l\dot{\theta})^2 =$

$= \frac{1}{2} \times m_1 \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1 l\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}^2) =$

$= \frac{1}{2} m_1 \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + m_2 \dot{x} l\dot{\theta} + \frac{1}{2} m_2 l^2 \dot{\theta}^2$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times k_1 \times x^2 + \frac{1}{2} k_2 (x + l\theta)^2 + \frac{1}{2} k_3 (l\theta)^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 (x^2 + 2xl\theta + l^2\theta^2) + \frac{1}{2} k_3 l^2\theta^2 =$

$= \frac{1}{2} k_1 x^2 + \frac{1}{2} k_2 x^2 + k_2 xl\theta + \frac{1}{2} k_2 l^2\theta^2 + \frac{1}{2} k_3 l^2\theta^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f(t)\, \delta x$

$Q_1 = f(t) \frac{dx}{dx} + 0 = f(t)$

$Q_2 = f(t) \frac{dx}{d\theta} + 0 = 0$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_1 \ddot{x} + m_2 \ddot{x} + m_2 l\ddot{\theta}$

$\frac{\partial V}{\partial x} = k_1 x + k_2 x + k_2 l\theta$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = m_2 l\ddot{x} + m_2 l^2\ddot{\theta}$

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = k_2 xl + k_2 l^2\theta + k_3 l^2\theta$

$$\begin{cases} m_1\ddot{x} + m_2\ddot{x} + m_2 l\ddot{\theta} + k_1 x + k_2 x + k_2 l\theta = f(t) \\ m_2 l\ddot{x} + m_2 l^2\ddot{\theta} + k_2 xl + k_2 l^2\theta + k_3 l^2\theta = 0 \end{cases}$$

Na forma matricial temos:

$$\begin{bmatrix} m_1 + m_2 & m_2 l \\ m_2 l & m_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 + k_3 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) As equações do movimento são:

$$\begin{bmatrix} 30 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 50000 & 5000 \\ 5000 & 7500 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequências naturais de vibração:

$$\left| \begin{bmatrix} K_{11} - \omega^2 m_{11} & K_{12} - \omega^2 m_{12} \\ K_{21} - \omega^2 m_{12} & K_{22} - \omega^2 m_{22} \end{bmatrix} \right| = 0 \quad :$$

$$\therefore \left| \begin{bmatrix} 50000 - \omega^2 \times 30 & 5000 - \omega^2 \times 5 \\ 5000 - \omega^2 \times 5 & 7500 - \omega^2 \times 5 \end{bmatrix} \right| = 0 \quad (\Leftrightarrow \quad \omega_1 = 37{,}416574 \text{ rad/s} \quad \vee \quad \omega_2 = 44{,}72136 \text{ rad/s}$$

Formas naturais de vibração:

$$(5000 - \omega_1^2 \times 5)\, u_1 + (7500 - \omega_1^2 \times 5)\, u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore (5000 - 37{,}416574^2 \times 5)\, u_1 + (7500 - 37{,}416574^2 \times 5)\, u_2 = 0 \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad u_2 = 4{,}000000\ u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

$$(5000 - \omega_2^2 \times 5)\, u_1 + (7500 - \omega_2^2 \times 5)\, u_2 = 0 \quad \therefore$$

$$\therefore (5000 - 44{,}72136^2 \times 5)\, u_1 + (7500 - 44{,}72136^2 \times 5)\, u_2 = 0 \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \quad u_2 = -2{,}0\ u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -2 \end{Bmatrix}$$

c) A excitação é harmónica, do tipo: $f(t) = 500 \cos 40t$

Então: $F = 500N$
$\omega = 40 \text{ rad/s}$

O deslocamento angular $\theta(t)$ é dado por:

$$\theta(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

$$= \frac{z_{11} F_2 - z_{12} F_1}{z_{11} z_{22} - z_{12} z_{21}} \cos(40t - \phi)$$

c) Valores de z_{ij} são:

$$z_{11} = -\omega^2 m_{11} + k_{11} \quad \therefore \quad z_{11} = -40^2 \times 30 + 50000 = 2000$$

$$z_{12} = -\omega^2 m_{12} + k_{12} \quad \therefore \quad z_{12} = -40^2 \times 5 + 5000 = -3000$$

$$z_{22} = -\omega^2 m_{22} + k_{22} \quad \therefore \quad z_{22} = -40^2 \times 5 + 7500 = -500$$

Amplitude de deslocamento, $\frac{\theta_1}{2}(\omega)$:

$$\frac{\theta_1}{2}(\omega) = \frac{0 - (-3000 \times 500)}{2000 \times (-500) - (-3000 \times (-3000))} = -0,15 \text{ rad}$$

Ângulo de fase, ϕ:

Resposta para a coordenada θ:

$$\theta(t) = -0,15 \times \cos(40t - \pi)$$

d) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_1 \quad \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1\\4\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}30 & 5\\5 & 5\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\4\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1\\4\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,081650\\0,326599\end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_2 \quad \therefore$$

$$\therefore \{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix}1\\-2\end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix}30 & 5\\5 & 5\end{bmatrix} \begin{Bmatrix}1\\-2\end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix}1\\-2\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}0,182574\\-0,365148\end{Bmatrix}$$

Equação do movimento na base modal.

$$[I]\left\{\ddot{\eta}(t)\right\} + [\Omega^2]\left\{\eta(t)\right\} = [\Phi]^T\left\{f(t)\right\}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 37,416574^2 & 0 \\ 0 & 44,721360^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,081650 & 0,182574 \\ 0,326599 & -0,365148 \end{bmatrix}^T\begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\Leftrightarrow$$

$$(\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 37,416574^2 & 0 \\ 0 & 44,721360^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,081650\, f(t) \\ 0,182574\, f(t) \end{Bmatrix}$$

e)

Exame de 2ª Prova de Avaliação de 13-06-2011 — Estudo para fins de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

Comprimento: $\ell = 0{,}5$ m
Secção recta circular de diâmetro d
Momento de 2ª ordem: I
Área da secção: A
Momento polar: I_p
Módulo de Young: $E = 210 \times 10^9$ Pa
Módulo de elasticidade transversal: $G = 80 \times 10^9$ Pa
Massa volúmica: $\rho = 7800$ kg/m^3

Para $n = 0$: - encastrada à flexão
- livre à torção

a) Diâmetro da secção recta para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 100 Hz:

$$f_1 = 100 \quad (*)$$

$$(*) \quad \frac{(\beta_1 \ell)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} = 100 \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \frac{1{,}8751^2}{2\pi} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times d^4}{7800 \times \frac{\pi}{4} d^2 \times 0{,}5^4}} = 100 \quad (\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad d = 0{,}034440 \text{ m}$$

Onde: $\beta_1 \ell = 1{,}8751$ porque as condições de fronteira são fixo-livre.

b) Para a torção, com as condições de fronteira livre-livre, temos:

$$\omega_n = n \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad \omega_1 = 1 \times \frac{\pi}{0{,}5} \times \sqrt{\frac{80 \times 10^9}{7800}} \quad (\Rightarrow$$

$$(\Rightarrow \quad \omega_1 = 20122{,}992765 \text{ rad/s}$$

c) Função de aproximação da forma natural fundamental :

$$v(x) = \delta \left[1 - \cos \frac{\pi}{2\ell} x \right]$$

Aplicabilidade da função de aproximação para um problema à flexão :

· Como o problema é de flexão (4ª ordem) a função de aproximação tem de ser derivável pelo menos 2 vezes (metade da ordem do problema)

$$\frac{d}{dx} v(x) = \frac{\delta \pi}{2\ell} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{2\ell}$$

$$\frac{d^2}{dx^2} v(x) = \frac{\delta \pi^2}{4\ell^2} \cos \frac{\pi x}{2\ell}$$

· Condições de fronteira geométricas, na extremidade $x = 0$, que têm de ser verificadas :

$$v(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\therefore \delta \left[1 - \cos \frac{\pi \times 0}{2\ell} \right] = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \delta (1 - 1) = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 0 = 0 \qquad \text{Verificado}$$

$$\frac{d}{dx} v(x)\Big|_{x=0} = 0$$

$$\therefore \frac{\delta \pi}{2\ell} \times \operatorname{sen} \frac{\pi \times 0}{2\ell} = 0 \quad (\Leftrightarrow)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \frac{\delta \pi}{2\ell} \times 0 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad 0 = 0 \qquad \text{Verificado}$$

· Condições de fronteira naturais :