

1) (4 val.) O pêndulo representado na figura oscila em torno do ponto O, sendo o seu movimento angular $\theta(t)$ controlado por dois conjuntos mola-amortecedor com constante de rigidez k e de amortecimento c. O sistema está sujeito a um momento exterior $M(t)$.

Na análise do sistema, considerar uma massa m concentrada em C e desprezar a massa das barras $\overline{AB}$ e $\overline{OC}$.

Num ensaio em regime livre, foram lidos os seguintes valores sequenciais para o deslocamento angular máximo em torno da posição de equilíbrio estático: 9.9°, −6.9°, 4.9° e −3.4°.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Para $a = 0.04$ m, $k = 200$ N · m^{-1} e $m = 3$kg, determinar:

b) (10%) a frequência angular natural não amortecida ω_n;

c) (15%) a razão de amortecimento ξ e o valor da constante c de cada amortecedor.

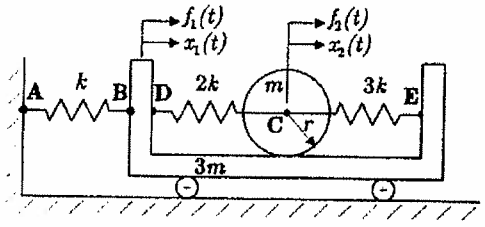
Admitindo uma perturbação inicial $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s,

d) (20%) determinar o instante em que o sistema passa pela primeira vez pela posição de equilíbrio estático;

e) (10%) determinar a energia dissipada pelo sistema até regressar definitivamente à posição de equilíbrio estático.

Para uma solicitação harmónica $M(t) = M_0 \cos \omega t$,

f) (20%) determinar a(s) frequência(s) ω de excitação que assegure(m) um factor de amplificação dinâmica inferior a $\sqrt{2}$.



2) (4 val.) O sistema mecânico representado na figura é constituído por:

- Uma carruagem de massa $3m$ ligada ao exterior através de uma mola linear elástica de rigidez k;
- Um cilindro de massa m e raio r que rola sem escorregar sobre a carruagem à qual está ligado através de 2 molas lineares elásticas de rigidez $2k$ e $3k$.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas absolutas $x_1(t)$ e $x_2(t)$. Na situação de equilíbrio estático, $x_1(t) = x_2(t) = 0$ e as molas não estão deformadas.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento do sistema são:

$$m\begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -1/2 & 3/2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + k\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

Para $\{f(t)\} = \begin{Bmatrix} f_1(t) = F\cos\omega t \\ f_2(t) = 0 \end{Bmatrix}$, de modo a que o cilindro funcione como um absorsor de vibrações da carruagem,

b) (25%) determinar a relação ω/ω_n e a força exercida pelo cilindro no ponto **D** da carruagem.

Para $m = 1$ kg e $k = 1$ N/m.

c) (15%) determinar as frequências e formas naturais de vibração.

Para condições iniciais nulas e para uma excitação transiente do tipo $\{f(t)\} = \{F_1 \quad F_2\}^T \mu(t)$.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal;

e) (20%) Determinar a relação F_2/F_1 de modo que a contribuição da 2ª forma natural de vibração seja nula para a resposta $x_1(t)$.

3) (4 val.) A figura representa um tramo de uma tubagem. O tramo tem comprimento ℓ e está simplesmente apoiado nas extremidades, possuindo em $x = \ell$ uma mola angular elástica de rigidez k. A secção recta da tubagem apresenta área A e momento de 2ª ordem I. O material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ.

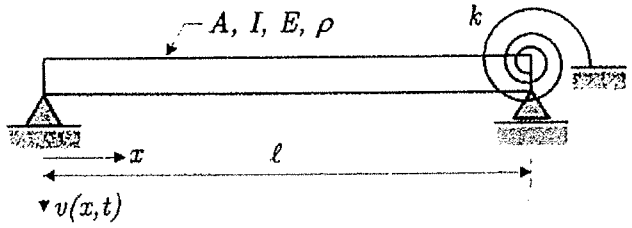
a) (20%) Escrever e classificar as condições de fronteira do problema de flexão do tramo da tubagem.

Utilizando o método da energia de Rayleigh com a função $V(x) = \delta \sin \frac{\pi}{\ell} x$ como aproximação da forma natural fundamental de flexão,

b) (40%) Estabelecer e caracterizar uma estimativa ω_1^R da frequência natural fundamental. Apresentar o resultado para $k = \alpha \frac{EI}{\ell}$ onde α representa um escalar.

c) (20%) Indicar o valor da frequência natural fundamental exacta para os valores limite de α, $\alpha \to 0$ e $\alpha \to \infty$;

d) (20%) Determinar o intervalo de valores de α para os quais é adequada a solução fornecida pelo método de Rayleigh com a função $V(x)$ proposta.



NOTA

$$\int \sin ax \, \mathrm{d}x = -\frac{\cos ax}{a} \qquad \int \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int x \sin ax \, \mathrm{d}x = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x \cos ax}{a} \qquad \int x \sin ax \, \mathrm{d}x = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x \sin ax}{a}$$

$$\int x^2 \sin ax \, \mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2} \sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a} \right) \cos ax \qquad \int x^2 \cos ax \, \mathrm{d}x = \frac{2x}{a^2} \cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3} \right) \sin ax$$

$$\int x \sin^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} - \frac{x \sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} \qquad \int x \cos^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{4} + \frac{x \sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int \sin^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

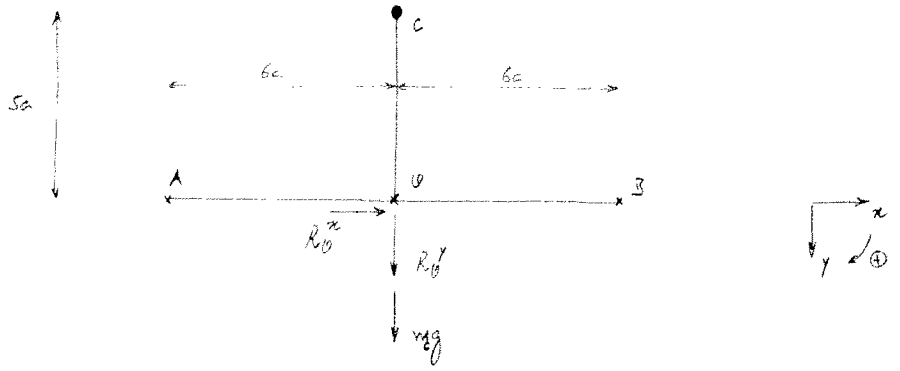
Feup, 08.07.2011
José Dias Rodrigues
Pedro Leal Ribeiro

Exame de Recurso de 08-07-2011
Vibrações e Ruído

Estudo para fins de ensino

Exercício 1

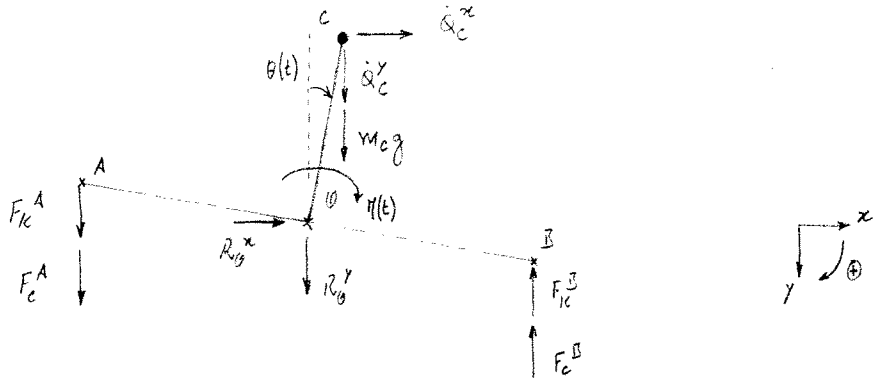
a) Quando o sistema se encontra em equilíbrio estático temos:



$$\Sigma F^x = 0 \quad \therefore \quad R_{IO}^x = 0$$

$$\Sigma F^y = 0 \quad \therefore \quad R_{IO}^y + m_c g = 0 \quad (=) \quad R_{IO}^y = -m_c g$$

Após perturbarmos o sistema temos:



Distâncias:

$$\vec{OA} = \begin{Bmatrix} -6a\cos\theta \\ -6a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OA} = \begin{Bmatrix} -6a \\ -6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{OB} = \begin{Bmatrix} 6a\cos\theta \\ 6a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OB} = \begin{Bmatrix} 6a \\ 6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{OC} = \begin{Bmatrix} 5a\,\mathrm{sen}\,\theta \\ -5a\cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{ linearizando: } \vec{OC} = \begin{Bmatrix} 5a\theta \\ -5a \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Velocidades:

$$\vec{v}_A = \vec{\omega A} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{v}_B = \vec{\omega B} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \vec{v}_c = \vec{\omega C} = \begin{Bmatrix} 5a\dot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Forças resistentes:

$$\vec{F}_K^A = -K \times \Delta\vec{\omega A} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} -6a \\ -6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} -6a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ +6Ka\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_C^A = -c \times \vec{v}_A = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -6a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 6ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_K^B = -K \times \Delta\vec{\omega B} = -K \times \left[\begin{Bmatrix} 6a \\ 6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 6a \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \right] = \begin{Bmatrix} 0 \\ -K6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\vec{F}_C^B = -c \times \vec{v}_B = -c \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 6a\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Quantidade de aceleração no ponto C:

$$\vec{Q}_C = m \times \vec{a}_C = m_c \times \begin{Bmatrix} 5a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 5m_c a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Momento dinâmico no ponto O:

$$\vec{K}_O = \cancel{\vec{K}_C} + \vec{\omega C} \times \vec{Q}_C = \begin{Bmatrix} 5a\theta \\ -5a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 5m_c a\ddot{\theta} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25m_c a^2\ddot{\theta} \end{Bmatrix}$$

$= 0$, porque é massa concentrada

Equação diferencial do movimento:

$$\Sigma \vec{M}_O = \vec{K}_O \therefore$$

$$\vec{v}_A \times \left(\vec{F}_K^A + \vec{F}_C^A\right) + \vec{v}_B \times \left(\vec{F}_K^B + \vec{F}_C^B\right) + \vec{\omega C} \times m_c\vec{g} + \vec{M}(t) = \vec{K}_O \quad (=)$$

$$(=) \begin{Bmatrix} -6a \\ -6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ 6Ka\theta + 6ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 6a \\ 6a\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ -K6a\theta - 6ca\dot{\theta} \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 5a\theta \\ -5a \\ 0 \end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix} 0 \\ m_c g \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 25m_c a^2\ddot{\theta} \end{Bmatrix} \quad (=)$$

$$(=)\ -36Ka^2\theta - 36ca^2\dot{\theta} - 36Ka^2\theta - 36ca^2\dot{\theta} + 5a\,m_c g\,\theta + M(t) =$$

$$= 25\,m_c a^2\,\ddot{\theta} \quad (=)$$

$$(=)\ 25\,m_c a^2\,\ddot{\theta} + \left(72Ka^2 - 5a\,m_c g\right)\theta + 72ca^2\,\dot{\theta} = M(t)$$

Temos então:

$$\underbrace{25\,m_c a^2}_{m_{eq}}\,\ddot{\theta}(t) + \underbrace{72ca^2}_{c_{eq}}\,\dot{\theta}(t) + \underbrace{\left(72Ka^2 - 5a\,m_c g\right)}_{k_{eq}}\theta(t) = M(t)$$

b) Frequência angular natural não amortecida, ω_n:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \therefore \quad \omega_n = \sqrt{\frac{72\times 200\times 0{,}04^2 - 5\times 0{,}04\times 3\times 9{,}8}{25\times 3\times 0{,}04^2}} = 11{,}958261 \ \text{rad/s}$$

c) Decremento logarítmico, δ:

$$\delta = \frac{1}{N}\ln\frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{1}\ln\frac{\frac{9{,}9\times\pi}{180}}{\frac{4{,}9\times\pi}{180}} = \ln\frac{9{,}9}{4{,}9} = 0{,}703300$$

Rateio de amortecimento, ζ:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0{,}703300}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0{,}703300^2}} = 0{,}111239$$

Constante c de cada amortecedor:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2\,m_{eq}\,\omega_n} \quad \therefore \quad 0{,}111239 = \frac{72\times c\times 0{,}04^2}{2\times 25\times 0{,}04^2\times 3\times 11{,}958261} \quad (=) \quad c = 2{,}771302 \ \text{Ns/m}$$

d) Frequência angular amortecida:

$$\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \quad \therefore \quad \omega_d = 11{,}958261\sqrt{1-0{,}111239^2} \quad (=) \quad \omega_d = 11{,}884044 \ \text{rad/s}$$

Como estamos perante um sistema sub-amortecido, $0<\zeta<1$, então sabemos que os instantes em que o sistema passa pela posição de equilíbrio são dados por:

$$t\Big|_{\theta(t)=0} = \frac{1}{\omega_d}\left(\frac{2n-1}{2}\pi + \phi\right), \quad n = 1, \ldots$$

Tendo em conta as condições iniciais de $\theta_0 = 0$ rad e $\dot{\theta}_0 = 10$ rad/s, temos:

$$\phi = \tan^{-1}\frac{\dot{\theta}_0 + \zeta\omega_n\theta_0}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,\theta_0} \quad \therefore \quad \phi = \tan^{-1}\frac{10+0}{0} \quad (=) \quad \phi = \pm 1{,}570796$$

O instante em que o sistema passa pela primeira vez na posição de equilíbrio é dado por:

$$t\Big|_{\theta(t)=0 \;\wedge\; n=1} = \frac{1}{11{,}884044}\left(\frac{2\times 1 - 1}{2}\times\pi + 1{,}570796\right) = 0{,}264354 \text{ s}$$

e) Quando o sistema atinge novamente a posição de equilíbrio estático, significa que dissipou toda a energia que possuía inicialmente.

Energia no instante $t = 0$ s:

$$E(0) = E_c(0) + E_p(0) =$$

$$= \frac{1}{2}\times m_{eq}\times\dot{\theta}_0^2 + \frac{1}{2}\times K_{eq}\times \cancel{\theta_0^2}^{\,=0} =$$

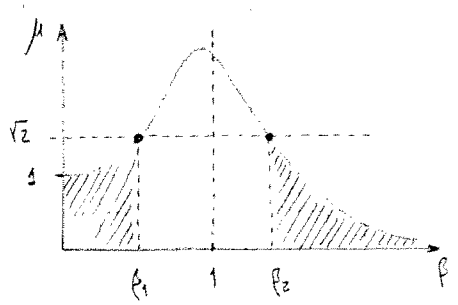
$$= \frac{1}{2}\times 25\times m\times a^2\times\dot{\theta}_0^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\times 25\times 3\times 0{,}04^2\times\left(\frac{10\times\pi}{180}\right)^2 =$$

$$= 0{,}001828 \text{ J}$$

f) Pretendemos saber quais as frequências ω que asseguram que μ seja inferior a $\sqrt{2}$.

Graficamente:



$$\mu < \sqrt{2} \quad (=)$$

$$(=) \quad \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} < \sqrt{2}$$

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n}$$

Então:

$$\frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\times 0{,}111239\times\beta)^2}} = \sqrt{2} \quad (=) \quad \beta_1 = 0{,}550999 \;\wedge\; \beta_2 = 1{,}281317$$

As frequências ω_1 e ω_2 são:

$$f_1 = \frac{\omega_1}{\omega_n} \therefore 0,550999 = \frac{\omega_1}{11,958261} \Leftrightarrow \omega_1 = 6,58899 \ rad/s$$

$$f_2 = \frac{\omega_2}{\omega_n} \therefore 1,282317 = \frac{\omega_2}{11,958261} \Leftrightarrow \omega_2 = 15,34624 \ rad/s$$

Finalmente, as frequências que asseguram que $\mu < \sqrt{2}$ são:

$$\omega < 6,58899 \ rad/s \quad \wedge \quad \omega > 15,34624 \ rad/s$$

Exame de Recurso de 08-01-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = x_1$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{x}_1$

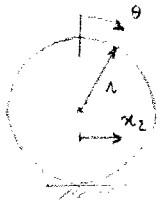
$q_2 = x_2$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{x}_2$

Energia cinética: $T = E_c = \frac{1}{2} \times 3m \times \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} \times m \times (\dot{x}_1 + \dot{x}_2)^2 + \frac{1}{2} \times J_c \times \dot{\theta}^2 =$

$= \frac{3}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m (\dot{x}_1^2 + 2\dot{x}_1\dot{x}_2 + \dot{x}_2^2) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} m \ell^2\right) \frac{\dot{x}_2^2}{\ell^2} =$

$= \frac{3}{2} m \dot{x}_1^2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_1^2 + m \dot{x}_1 \dot{x}_2 + \frac{1}{2} m \dot{x}_2^2 + \frac{1}{4} m \dot{x}_2^2 =$

$= 2m\dot{x}_1^2 + m\dot{x}_1\dot{x}_2 + \frac{3}{4} m \dot{x}_2^2$



$x_2 = \ell \sin\theta$

$\dot{x}_2 = \ell \dot{\theta}$

Energia potencial: $V = E_p = \frac{1}{2} \times K \times x_1^2 + \frac{1}{2} \times 2K \times (x_2 + x_1 - x_1)^2 + \frac{1}{2} \times 3K \times (x_1 - x_1 - x_2)^2 =$

$= \frac{1}{2} K x_1^2 + K x_2^2 + \frac{3}{2} K x_2^2 =$

$= \frac{1}{2} K x_1^2 + \frac{5}{2} K x_2^2$

Forças não conservativas: $\delta W = f_1(t)\,\delta x_1 + f_2(t)\,\delta x_2$

$Q_1 = f_1(t) \frac{dx_1}{dx_1} + f_2(t) \frac{dx_2}{dx_1} = f_1(t)$

$Q_2 = f_1(t) \frac{dx_1}{dx_2} + f_2(t) \frac{dx_2}{dx_2} = f_2(t)$

Equações de Lagrange: $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_1}\right) = 4m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x_1} = Kx_1$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_2}\right) = m\ddot{x}_1 + \frac{3}{2} m \ddot{x}_2$ $\qquad \frac{\partial V}{\partial x_2} = 5Kx_2$

$$\begin{cases} 4m\ddot{x}_1 + m\ddot{x}_2 + Kx_1 = f_1(t) \\ m\ddot{x}_1 + \frac{3}{2} m \ddot{x}_2 + 5Kx_2 = f_2(t) \end{cases}$$

Na forma matricial, temos:

$$\begin{bmatrix} 4m & m \\ m & \frac{3}{2}m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 5K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

b) A equação do movimento é:

$$\begin{bmatrix} 5/2\,m & -1/2\,m \\ -1/2\,m & 3/2\,m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 3K & -2K \\ -2K & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{Bmatrix}$$

Sabemos que:

$$f(t) = \begin{Bmatrix} f_1(t) = F\cos\omega t \\ f_2(t) = 0 \end{Bmatrix}$$

Exame de Prova de Recurso de 09-07-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 3

Comprimento : ℓ
Simplesmente apoiada
Rigidez da mola : k
Área da secção recta : A
Momento de 2ª ordem : I
Módulo de elasticidade : E
Massa volúmica : ρ

a) Condições de fronteira de um veio simplesmente apoiado, para um problema de flexão:

$$V(0) = 0$$

$$V(\ell) = 0$$

$$EI \left.\frac{d^2}{dx^2} V(x)\right|_{x=0} = 0$$

$$EI \left.\frac{d^2}{dx^2} V(x)\right|_{x=\ell} =$$