


1) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma viga de massa $M$, articulada em **O** e apoiada em **A** sobre um suporte que funciona como um conjunto mola-amortecedor. No ponto **C**, está montado um disco excêntrico de massa $m$ que roda com uma velocidade angular constante $\omega$ e cujo centro de massa está descentrado dum valor $e$ do eixo de rotação, originando uma força centrífuga (rotativa) de valor $me\omega^2$. Admitindo que em repouso a viga se encontra na horizontal e, a partir dessa posição de referência, efectua pequenas oscilações $\theta(t)$, determinar:

a) (25%) a equação diferencial de movimento;

Aplicação numérica:

$\ell = 600$ mm $\quad s = 440$ mm $\quad M = 4.296$ kg

$m = 1.6$ kg $\quad me = 1 \times 10^{-3}$ kgm

Num ensaio em regime livre, registou-se a resposta representada e anotada na figura.

Determinar:

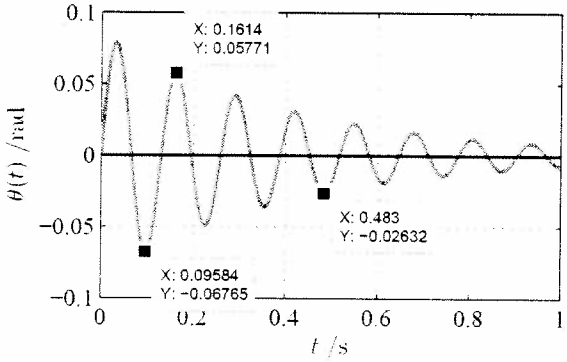
b) (15%) a razão de amortecimento $\xi$;

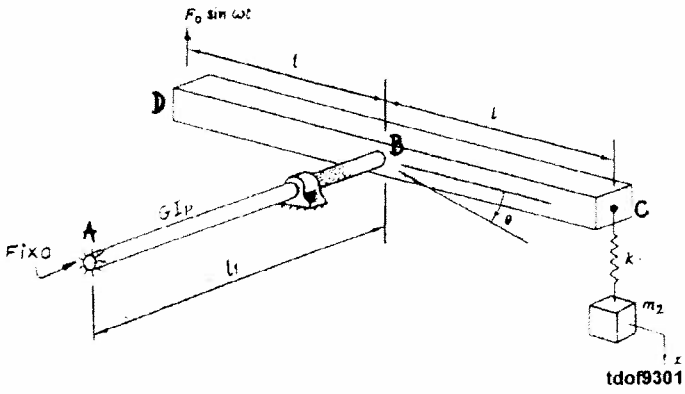
c) (15%) a constante $c$ de amortecimento do suporte;

d) (15%) a constante $k$ de rigidez do suporte;

e) (15%) a amplitude de aceleração (linear) do centro de massa **G** da viga para $\omega = 930$ rpm;

f) (15%) a amplitude da força máxima transmitida ao suporte;






2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por um veio fixo em **A** e ligado em **B** a uma barra rígida de massa $m_1$. Na extremidade **C** da barra está ligada uma mola de rigidez $k$ a qual se encontra ligada a uma massa concentrada $m_2$. Na extremidade **D** da barra está aplicada uma solicitação harmónica $f(t) = F_0 \sin \omega t$.

O movimento do sistema a partir da posição de equilíbrio estático é descrito pelas coordenadas $\theta(t)$ e $x(t)$ e a massa do veio é desprezável face à massa da barra.

a) (25%) Escrever, literalmente, as equações de movimento utilizando o formalismo de Lagrange.

Para os valores numéricos seguintes:

$m_1 = m_2 = 3m$ $\quad \ell_1 = \ell = 1$ m $\quad k = 160$ N•m$^{-1}$ $\quad GI_p = 80$ N•m$^2$

b) (20%) Determinar as frequências e formas naturais de vibração. Comentar as formas naturais de vibração.

c) (15%) Escrever as equações do movimento na base modal;

d) (20%) Para a solicitação harmónica $f(t) = F_0 \sin \omega t$, determinar a amplitude da resposta $x(t)$ e $\theta(t)$ para $m = 2$ kg e $\omega = 8$ rad•s$^{-1}$. Comentar o resultado. Esboçar graficamente a variação das amplitudes de resposta em função da frequência.

e) (20%) Redimensionar a constante de rigidez $k$ da mola de modo que a frequência fundamental do sistema seja inferior a 2 rad•s$^{-1}$.

3) (4 val.) A figura a) representa um veio em aço de comprimento $\ell = 0.75$ m e simplesmente apoiado. O material do veio (aço) apresenta módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa, módulo de elasticidade transversal $G = 80$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m$^3$. A secção recta do veio é circular de diâmetro $d$.

a) (30%) Dimensionar a secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 125 Hz;

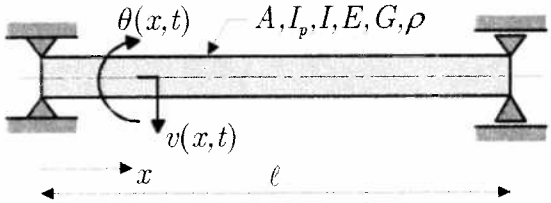
b) (15%) Determinar a frequência fundamental de torção do veio;

A figura b) representa o veio com um pinhão de massa $m = 1.37$ kg e momento de inércia $J_{xx} = 5.516 \times 10^{-4}$ kgm$^2$ montado em $\ell / 2$. O momento de inércia diametral do pinhão é desprezável.

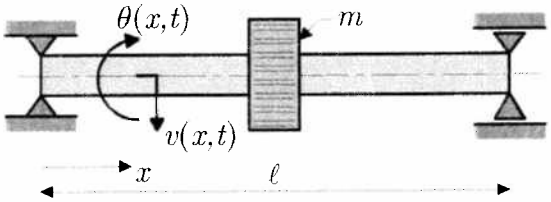
c) (30%) Determinar (estimar) as 2 primeiras frequências naturais de flexão. Comentar o resultado.

d) (10%) Determinar a frequência fundamental de torção do sistema (veio+pinhão).

e) (15%) Escrever as condições de fronteira para a torção do sistema (veio+pinhão).




a)




b)

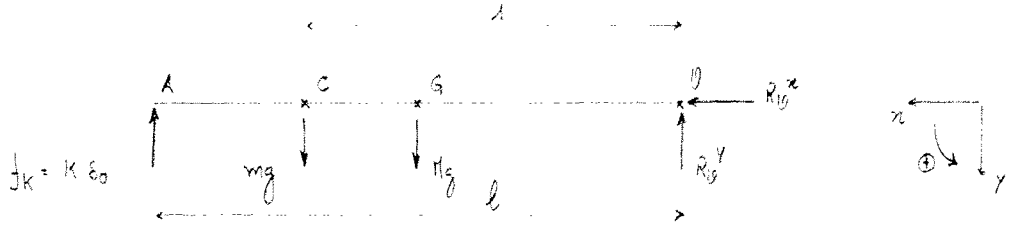
NOTA: Secção circular: $I = \dfrac{\pi d^4}{64}$, $I_p = \dfrac{\pi d^4}{32}$.

FEUP, 26 de Setembro de 2011
**José Dias Rodrigues**

Exame de Conclusão de Curso de 26-09-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 1

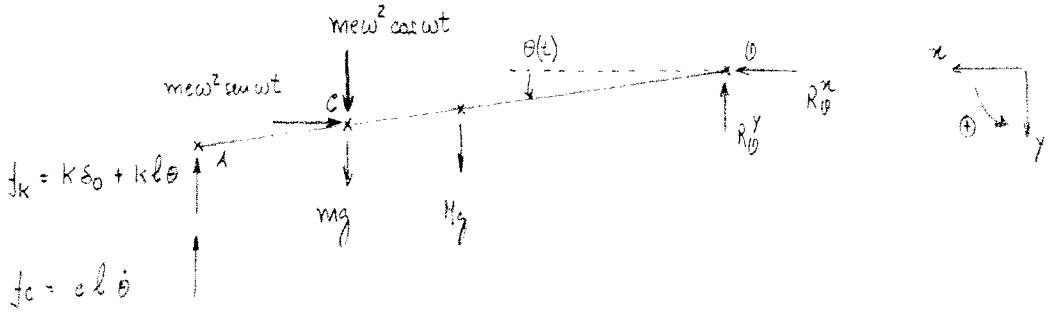
Na posição de equilíbrio estático:




$$\sum \vec{M}_O = \vec{0} \quad \therefore \quad -lK\delta_0 + \tfrac{l}{2}mg + \tfrac{l}{2}Hg = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad Kl\delta_0 = \left(\tfrac{1}{2}m + \tfrac{l}{2}H\right)g$$

Quando perturbamos o sistema:




a) Equação diferencial do movimento:

$$\sum \vec{M}_O = \vec{K}_O \quad \therefore$$

$$\therefore -l\cos\theta \times \left(cl\dot{\theta} + K\delta_0 + Kl\theta\right) + \tfrac{1}{2}\cos\theta \times \left(me\omega^2\cos\omega t + mg\right) +$$

$$+ \tfrac{1}{2}\operatorname{sen}\theta\, me\omega^2 \operatorname{sen}\omega t + \tfrac{l}{2}\cos\theta \times Hg = J_O\ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -cl^2\dot{\theta} - \cancel{Kl\delta_0} - Kl^2\theta + \tfrac{1}{2}me\omega^2\cos\omega t + \cancel{\tfrac{1}{2}mg} + \underbrace{\tfrac{1}{2}\theta\, me\omega^2 \operatorname{sen}\omega t}_{\text{despreável}} +$$

$$+ \tfrac{l}{2}Hg = J_O\ddot{\theta} \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow J_O\ddot{\theta} + cl^2\dot{\theta} + Kl^2\theta = \tfrac{1}{2}me\omega^2\cos\omega t$$

Onde :

$$J_O = J_O^{barra} + J_O^{disco} =$$

$$= \frac{1}{12} \times m_b \times l^2 + m_b \times \left(\frac{l}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \times m_d \times r^2 + m_d \times s^2 =$$

$$= \frac{1}{3} m_b l^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m_d r^2 + m_d s^2}$$

A inércia do disco é desprezada, pois o valor de $r$ é desconhecido.

b) Decremento logarítmico, $\delta$:

$$\delta = \frac{1}{N} \ln \frac{\theta(t_1)}{\theta(t_2)} \quad \therefore \quad \delta = \frac{1}{3} \ln \frac{-0,06765}{-0,02632} = 0,314673$$

Razão de amortecimento, $\zeta$:

$$\zeta = \frac{\delta}{\sqrt{(2\pi)^2 + \delta^2}} \quad \therefore \quad \zeta = \frac{0,314673}{\sqrt{(2\pi)^2 + 0,314673^2}} = 0,050019$$

c) Período natural amortecido, $T_d$:

$$T_d = \frac{t_2 - t_1}{N} \quad \therefore \quad T_d = \frac{0,483 - 0,09584}{3} = 0,129053 \text{ s}$$

Frequência natural amortecida, $\omega_d$:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{T_d} \quad \therefore \quad \omega_d = \frac{2\pi}{0,129053} = 48,686860 \text{ rad/s}$$

Frequência natural não amortecida, $\omega_n$:

$$\omega_n = \frac{\omega_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \quad \therefore \quad \omega_n = \frac{48,686860}{\sqrt{1 - 0,050019^2}} = 48,747879 \text{ rad/s}$$

Constante de amortecimento e do suporte:

$$\zeta = \frac{c_{eq}}{2 m_{eq} \omega_n} \quad (=) \quad \zeta = \frac{c \cancel{l^2}}{2 \times \frac{1}{3} \times m_b \times \cancel{l^2} \times \omega_n} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 0{,}050019 = \frac{c}{2 \times \frac{1}{3} \times 4{,}296 \times 48{,}747879} \quad \Leftrightarrow \quad c = 6{,}983349 \ N/s/m$$

**d)** Constante de rigidez $k$ do suporte:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{K_{eq}}{m_{eq}}} \quad \Leftrightarrow \quad \omega_n = \sqrt{\frac{k\,\ell^2}{\frac{1}{3} \times m_b \times \ell^2}} \quad \therefore$$

$$\therefore \quad 48{,}747879 = \sqrt{\frac{k}{\frac{1}{3} \times 4{,}296}} \quad \Leftrightarrow \quad k = 3402{,}941372 \ N/m$$

**e)** Frequência, $\omega$:

$$\omega = 930 \ rpm \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{930}{60} \times 2\pi = 97{,}389372 \ rad/s$$

Resposta em deslocamento do sistema, $\theta(t)$

$$\theta(t) = \Theta(\omega) \cos(\omega t - \phi)$$

Velocidade de resposta do sistema, $\dot{\theta}(t)$

$$\dot{\theta}(t) = -\Theta(\omega)\, \omega\, \text{sen}(\omega t - \phi)$$

Aceleração de resposta do sistema, $\ddot{\theta}(t)$

$$\ddot{\theta}(t) = -\Theta(\omega)\, \omega^2 \cos(\omega t - \phi)$$

A amplitude de resposta é:

$$\Theta(\omega) = \mu \times \Theta_s = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2}} \times \frac{F_{eq}}{K_{eq}} \qquad \text{(equação 3)}$$

Onde o deslocamento estático $\Theta_s$ é:

$$\Theta_s(\omega) = \frac{F_{eq}}{K_{eq}} = \frac{\lambda\, m_e\, e\, \omega^2}{k\,\ell^2} = \frac{0{,}44 \times 1 \times 10^{-3} \times 97{,}389372^2}{3402{,}941372 \times 0{,}6^2} = 0{,}003407$$

E a razão de frequências é:

$$\beta = \frac{\omega}{\omega_n} = \frac{97{,}389372}{48{,}747879} = 1{,}997818$$

Voltando à equação 1, a amplitude de resposta é:

$$\Theta(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\gamma\beta)^2}} \times \Theta_s =$$

$$= \frac{1}{\left[(1 - 1{,}997818^2)^2 + (2 \times 0{,}050019 \times 1{,}997818)^2\right]^{1/2}} \times 0{,}002407 =$$

$$= 0{,}005699 \text{ rad}$$

Amplitude de aceleração:

$$\ddot{\theta}(t) = -\Theta(\omega)\,\omega^2 \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= -0{,}005699 \times 97{,}389372^2 \cos(\omega t - \phi) =$$

$$= \underbrace{-54{,}053247}_{\text{Amplitude}} \times \cos(\omega t - \phi)$$

$\ddot{\Theta}(\omega)$

No ponto G, a amplitude de aceleração é:

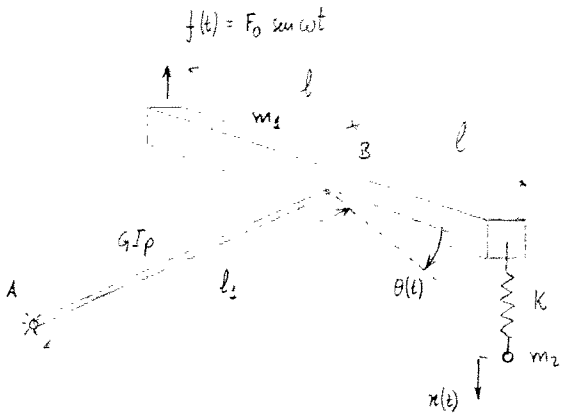
$$\ddot{\Theta}_G(\omega) = \frac{l}{2} \times \ddot{\Theta}(\omega) = \frac{0{,}6}{2} \times (-54{,}053247) = -16{,}215974 \text{ m/s}^2$$

f)

Exame de Conclusão de Curso de 26-09-2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 2

Quando perturbamos o sistema temos:




Rigidez do veio: $K_t = \frac{G I_p}{l_1}$

a) Coordenadas generalizadas: $q_1 = \theta(t)$ $\quad \dot{q}_1 = \dot{\theta}(t)$
$q_2 = x(t)$ $\quad \dot{q}_2 = \dot{x}(t)$

Energia cinética: $E_c = \frac{1}{2} \times \overset{\text{barra}}{I_B} \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}^2 =$

$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{12} \times m_1 \times (2l)^2 \times \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \times m_2 \times \dot{x}^2 =$

$= \frac{1}{6} m_1 l^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$

Energia potencial: $E_p = \frac{1}{2} \times k_t \times \theta^2 + \frac{1}{2} \times K \times (x - l\theta)^2$

Forças não conservativas: $Q_1 = f(t) \times l \times \cos\theta \ \frac{d\theta}{d\theta} + 0 = l\, f(t)$

$Q_2 = f(t) \times l \times \cos\theta \ \frac{d\theta}{dx} + 0 = 0$

Equações de Lagrange:

$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{3} m_1 l^2 \dot{\theta}$

$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) = \frac{1}{3} m_1 l^2 \ddot{\theta}$

$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$

$\frac{\partial V}{\partial \theta} = K_t \theta + k(x - l\theta) \times (-l) =$

$= K_t \theta + Kl(l\theta - x)$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} = m_2 \dot{x} \qquad \frac{\partial V}{\partial x} = K(x - \ell\theta)$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) = m_2 \ddot{x}$$

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

Temos então:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial V}{\partial \theta} = Q_1 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial T}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial x} = Q_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3} m_1 \ell^2 \ddot{\theta} + K_t \theta + K\ell(\ell\theta - x) = \ell f(t) \\ m_2 \ddot{x} + K(x - \ell\theta) = 0 \end{cases}$$

Que na forma matricial é:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} m_1 \ell^2 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} K_t + K\ell^2 & -K\ell \\ -K\ell & K \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \ell f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) Com os valores numéricos dados temos:

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{3} \times 3m \times 1 & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{10}{1} + 160 \times 1^2 & -160 \times 1 \\ -160 \times 1 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 240 & -160 \\ -160 & 160 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Frequências naturais de vibração:

$$\begin{vmatrix} K_{11} - \omega^2 m_1 & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} - \omega^2 m_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \quad \begin{vmatrix} 240 - \omega^2 m & -160 \\ -160 & 160 - \omega^2 \times 3m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \omega_1 = \frac{3.917724}{\sqrt{m}} \quad \wedge \quad \omega_2 = \frac{16.672875}{\sqrt{m}}$$

Formas naturais de vibração:

$$K_{21} u_1 + (K_{22} - \omega^2 m_2) u_2 = 0 \quad \therefore \quad -160 u_1 + (160 - \omega^2 \times 3m) u_2 = 0$$

1ª forma natural:

$$-160\,u_1 + \left(160 - \frac{3{,}717724^2}{m} \times 3m\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad u_2 = 1{,}404071\,u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_1 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}404071 \end{Bmatrix}$$

2ª forma natural:

$$-160\,u_1 + \left(160 - \frac{16{,}672835^2}{m} \times 3m\right) u_2 = 0 \quad (=)$$

$$(=) \quad u_2 = -0{,}237405\,u_1 \quad \Rightarrow \quad \{u\}_2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}237405 \end{Bmatrix}$$

c) Vectores modais normalizados:

$$\{\phi\}_1 = \frac{1}{\left[\{u\}_1^T [m] \{u\}_1\right]^{1/2}} \{u\}_1 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}404071 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}404071 \end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1{,}404071 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}380301/\sqrt{m} \\ 0{,}533940/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

$$\{\phi\}_2 = \frac{1}{\left[\{u\}_2^T [m] \{u\}_2\right]^{1/2}} \{u\}_2 =$$

$$= \frac{1}{\left[\begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}237405 \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 3m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}237405 \end{Bmatrix}\right]^{1/2}} \begin{Bmatrix} 1 \\ -0{,}237405 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +0{,}924863/\sqrt{m} \\ -0{,}219567/\sqrt{m} \end{Bmatrix}$$

Equações do movimento na base modal:

$$[I] \{\ddot{\eta}(t)\} + [\Omega] \{\eta(t)\} = [\Phi]^T \{f(t)\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3{,}717724^2}{m} & 0 \\ 0 & \frac{16{,}672835^2}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0{,}380301/\sqrt{m} & 0{,}924863/\sqrt{m} \\ 0{,}533940/\sqrt{m} & -0{,}219567/\sqrt{m} \end{bmatrix}^T \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (=)$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\eta}_1(t) \\ \ddot{\eta}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{3,917724^2}{m} & 0 \\ 0 & \frac{16,672875^2}{m} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \eta_1(t) \\ \eta_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,380301/\sqrt{m} & \hat{f}(t) \\ 0,924863/\sqrt{m} & \hat{f}(t) \end{Bmatrix}$$

d)

Exame de Conclusão de Curso de 26/09/2011 — Estudo para fim de curso
Vibrações e Ruído

Exercício 3

Comprimento : $\ell = 0{,}75$ m
Simplesmente apoiado : Flexão → $\beta_1 \ell = \pi$
Módulo de elasticidade longitudinal : $E = 210$ GPa
Módulo de elasticidade transversal : $G = 80$ GPa
Massa volúmica : $\rho = 7800$ kg/m$^3$
Secção recta circular

a) Diâmetro do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 125 Hz :

$$f_1 = 125 \quad (=)$$

$$(=) \frac{(\beta_1 \ell)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E I}{\rho A \ell^4}} = 125 \quad \therefore$$

$$\therefore \frac{\pi^2}{2\pi} \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times \frac{\pi}{64} \times d^4}{7800 \times \frac{\pi}{4} \times d^2 \times 0{,}75^4}} = 125 \quad (=)$$

$$(=) \quad d = 0{,}034507 \text{ m}$$

Então, o diâmetro mínimo do veio para que se verifique as condições do enunciado é de $d = 0{,}034507$ m, logo, $d > 0{,}034507$ m.

b) Para a torção, um veio simplesmente apoiado apresenta-se com as extremidades livres à torção.

Então, a frequência natural fundamental de torção é dada por :

$$\omega_1 = 1 \times \frac{\pi}{\ell} \times \sqrt{\frac{G}{\rho}} \quad \therefore$$

$$\therefore \omega_1 = \frac{\pi}{0{,}75} \times \sqrt{\frac{80 \times 10^9}{7800}} \quad (=) \quad \omega_1 = 13{,}4149 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

c) Temos agora um pinhão, a meio do veio, com $m = 1.37$ kg e $J_{xx} = 5{,}516 \times 10^{-4}$ kg m$^2$.

Para a frequência natural fundamental de flexão, temos :

$n = 1$



Função de aproximação: $v(x) = \delta \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

Derivável 2 vezes: $\frac{d}{dx} v(x) = \delta \frac{\pi}{\ell} \cos\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

$\frac{d^2}{dx^2} v(x) = -\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi x}{\ell}\right)$

Verificar as condições de fronteira: $v(0) = 0$

$v(\ell) = 0$

Método da energia de Rayleigh:

$$V_{máx} = \frac{1}{2}\int_0^\ell E\,I(x)\left[\frac{d^2}{dx^2} v(x)\right]^2 dx + V_{efn} =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^\ell E\,I(x)\left[-\delta \frac{\pi^2}{\ell^2} \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}\right]^2 dx + 0 =$$

$$= \frac{EI}{2} \frac{\delta^2 \pi^4}{2\ell^3}$$

$$T^* = \frac{T_{máx}}{\omega^2} = \frac{1}{2}\int_0^\ell \rho A(x)\left[v(x)\right]^2 dx + T^*_{efn} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho A(x) \times \left[\delta \operatorname{sen} \frac{\pi x}{\ell}\right]^2 dx + \frac{1}{2} \times m \times \left[v(\ell/2)\right]^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \rho A \frac{\delta^2 \ell}{2} + \frac{1}{2} m \delta^2$$

$$\omega^2 = \frac{V_{max}}{T^*} = \frac{\frac{EI \delta^2 \pi^4}{4\ell^3}}{\frac{1}{4}\rho A \delta^2 \ell + \frac{1}{2} m \delta^2} = \frac{EI\pi^4}{(A \times \ell \times \rho + 2xm)\ell^3}$$

Então: $I = \frac{d^4 \times \pi}{64} = 69{,}542 \times 10^{-9}\ m^4$ ; $A = \pi \times \frac{d^2}{4} = 934{,}820164 \times 10^{-6}\ m^2$

$$\omega_1 = \left[\frac{210 \times 10^9 \times 69{,}542 \times 10^{-9} \times \pi^4}{(934{,}820164 \times 10^{-6} \times 0{,}75 \times 7800 + 2 \times 1{,}37) \times 0{,}75^3}\right]^{1/2} =$$

$$= 640{,}92\ rad/s$$

Para a 2ª frequência natural temos:

$n = 2$



$$\omega_2 = (\beta_2 \ell)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho A \ell^4}} \quad \therefore \quad \omega_2 = 4\pi^2 \sqrt{\frac{210 \times 10^9 \times 69{,}542 \times 10^{-9}}{7800 \times 934{,}820164 \times 10^{-6} \times 0{,}75^4}} = 3140{,}936154\ rad/s$$