1) (1.5 val) O comportamento dinâmico de um sistema com 1 grau de liberdade é governado pela equação $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$ e pelas condições iniciais x_0 e $\dot{x}_0$.

a) (40%) **Discutir** a natureza das raízes da equação característica, **caracterizar** o correspondente tipo de movimento $x(t)$ livre ou natural e **classificar** o sistema vibratório;

b) (30%) **Explicar**, sucintamente, um método de identificação do amortecimento indicando qual o seu princípio;

c) (30%) Com base na função de resposta impulsiva $h(t-\tau)$, **estabelecer,** justificando, a(s) expressão(s) genérica(s) da resposta para $\forall t > 0$ a uma excitação transiente arbitrária $f(t)$ com um tempo de actuação t_c.

2) (1.5 val) Para um sistema vibratório amortecido sujeito a uma excitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$,

a) (40%) **Caracterizar** a resposta estacionária para $\omega << \omega_n$ e $\omega >> \omega_n$. **Indicar**, justificando, qual a propriedade mecânica mais influente na resposta;

b) (30%) **Definir** transmissibilidade de força. **Representar** a transmissibilidade de força em função da frequência e para 2 valores distintos de amortecimento, indicando no gráfico eventuais pontos (zonas) notáveis;

c) (30%) **Discutir** e **justificar** a eficiência do isolamento em termos da **massa**, da **rigidez** e do **amortecimento** do sistema.

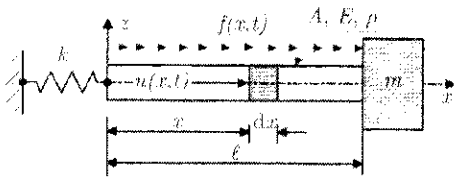
3) (2.5 val) O comportamento dinâmico de um sistema com n graus de liberdade é descrito pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x\}_0$ e $\{\dot{x}\}_0$.

a) (30%) **Definir**: i) modo natural de vibração; ii) forma natural de vibração; iii) nodo de vibração;

b) (40%) **Indicar** e **escrever** a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal; **Escrever** a transformação de coordenadas associada indicando o significado das grandezas envolvidas; **Caracterizar** as equações de movimento na base modal; **Justificar** a designação "sobreposição modal";

c) (30%) **Explicar**, sucintamente, a função do absorsor de vibrações e como é equilibrada a força de excitação $f(t) = F\cos\omega t$ actuante no primário. **Representar** graficamente a amplitude $X_2(\omega)$ do absorsor, indicando claramente eventuais pontos notáveis e a posição de funcionamento. **Indicar** como proceder para aumentar a gama de funcionamento eficiente do absorsor.

4) (2.5 val.) Na figura representa-se uma barra de comprimento ℓ em vibração longitudinal $u(x,t)$.



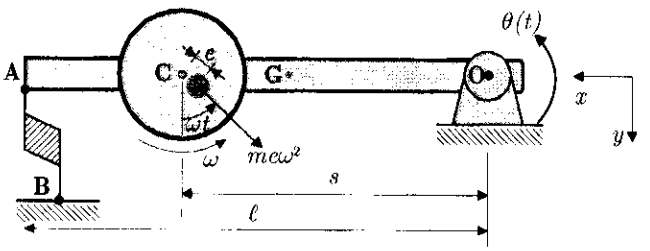
a) (30%) Considerando um elemento infinitesimal de comprimento dx, **estabelecer** e **caracterizar** a equação diferencial de movimento;

b) (20%) **Escrever**, **classificar** e **indicar** o significado físico das condições de fronteira da barra representada;

c) (30%) **Indicar** a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh para sistemas contínuos e quais os requisitos da função de aproximação na formulação "fraca". **Indicar**, justificando, qual das aproximações é mais precisa: a aproximação da forma natural ou a aproximação da frequência natural ?

d) (20%) **Mostrar**, justificando, como determinar a resposta $u(x,t)$ a uma solicitação genérica $f(x,t)$.

FEUP, 05.07.2013
José Dias Rodrigues



1) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma viga de massa M, articulada em **O** e apoiada em **A** sobre um suporte que funciona como um conjunto mola-amortecedor. No ponto **C**, está montado um disco excêntrico de massa m e momento de inércia $J_C = \frac{1}{2}mr^2$ que roda com uma velocidade angular constante ω e cujo centro de massa está descentrado dum valor e do eixo de rotação, originando uma força centrífuga (rotativa) de valor $mc\omega^2$. Admitindo que em repouso a viga se encontra na horizontal e, a partir dessa posição de referência, efectua pequenas oscilações $\theta(t)$, determinar:

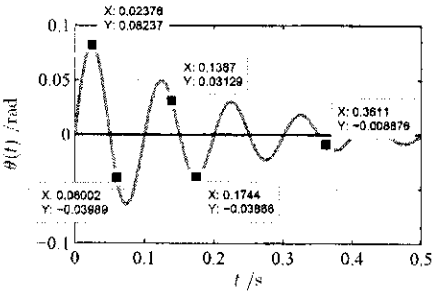
a) (25%) a equação diferencial de movimento.

Aplicação numérica:

$\ell = 600$ mm, $s = 450$ mm, $M = 0.936$ kg, $m = 0.153$ kg, $r = 60$ mm, $mc = 7.6\times10^{-4}$ kgm.

Num ensaio em regime livre, registou-se a resposta representada e anotada na figura.

Determinar:



b) (15%) a razão de amortecimento ξ;

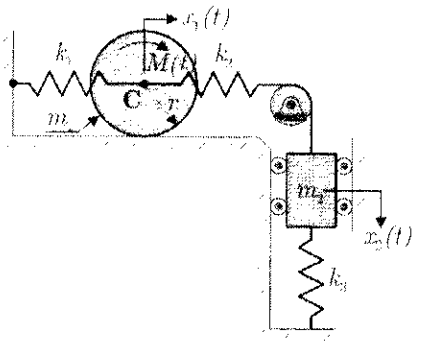
c) (15%) a constante c de amortecimento do suporte;

d) (15%) a constante k de rigidez do suporte.

Para $\omega = 570$ rpm, determinar:

e) (20%) a amplitude de velocidade (linear) do ponto A e a força $f_T(t)$ transmitida ao suporte.

f) (10%) Determinar a amplitude máxima de resposta estacionária para o ponto A e a respectiva velocidade de rotação.



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por um cilindro de raio r e massa m_1 que rola sem escorregar sobre uma superfície plana. O cilindro está ligado ao exterior por uma mola de rigidez k_1 e a uma massa m_2 por uma mola de rigidez k_2. A massa m_2 translada verticalmente e está ligada ao exterior por uma mola de rigidez k_3.

No eixo do cilindro está aplicado um momento motor $M(t)$. O movimento do sistema, a partir da posição de equilíbrio estático, é descrito pelas coordenadas absolutas $x_1(t)$ e $x_2(t)$.

a) (30%) Escrever as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para os valores seguintes:

$m_1 = 2m$, $m_2 = m$, $r = 0.1$ m, $k_1 = 3k$, $k_2 = k$, $k_3 = k$,

b) (10%) estabelecer a equação característica polinomial;

c) (10%) determinar as frequências e as formas naturais de vibração;

d) (10%) exprimir as equações de movimento na base modal com massas modais unitárias;

Para $m = 5$ kg e $k = 8000$ N/m,

e) (15%) Determinar a resposta $x_2(t)$ devida a um momento motor harmónico de amplitude M_0 e de frequência $\omega = 43$ rad/s.

f) (10%) Nas condições de funcionamento da alínea anterior, redimensionar k_3 de modo que a massa m_2 funcione como um absorsor de vibrações.

g) (15%) Para condições iniciais nulas, e utilizando a análise modal truncada, determinar, justificando, a resposta $x_2(t)$ provocada pela excitação $M(t) = \begin{cases} M_0 & 0 \le t \le 0.053 \text{ s} \\ 0 & t > 0.053 \text{ s} \end{cases}$.