1) (2 val) O absorsor de vibrações constitui uma técnica de controlo passivo de vibrações.

a) (35%) Explicar, sucintamente, a função do absorsor de vibrações. Representar graficamente a amplitude $X_1(\omega)$ do primário antes e após a montagem do absorsor e a amplitude $X_2(\omega)$ do absorsor, indicando claramente eventuais pontos notáveis e a posição (ω) de funcionamento;

b) (35%) Indicar quantas condições são necessárias para dimensionar um absorsor e qual o critério de dimensionamento para que o absorsor esteja sintonizado para a frequência de excitação ω;

c) (30%) Explicar como é equilibrada a força de excitação $f(t) = F\cos\omega t$ actuante no primário.

2) (2 val) O comportamento dinâmico de um sistema com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$ e pelas condições iniciais $\{x\}_0$ e $\{\dot{x}\}_0$.

a) (25%) Caracterizar e indicar vantagens e/ou inconvenientes do formalismo de Lagrange como metodologia de estabelecimento das equações de movimento.

b) (25%) Indicar as propriedades mais relevantes das matrizes de massa e de rigidez;

c) (25%) Estabelecer e caracterizar o problema característico associado;

d) (25%) Definir: i) modo natural de vibração; ii) forma natural de vibração; iii) nodo de vibração;

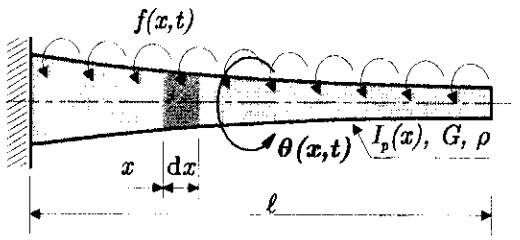
3) (2 val) A resposta dinâmica de um sistema com n graus de liberdade é representada pela solução do sistema de n equações diferenciais de movimento.

a) (30%) Para uma solicitação harmónica aplicada no grau de liberdade genérico r, $f_r(t) = F\sin\omega t$, caracterizar a resposta estacionária do sistema e representar graficamente a amplitude de resposta $X_r(\omega)$, indicando eventuais pontos notáveis;

b) (40%) Indicar e escrever a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal; Escrever a transformação de coordenadas associada indicando o significado das grandezas envolvidas; Caracterizar as equações de movimento na base modal; Justificar a designação "sobreposição modal";

c) (30%) Indicar a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh e justificar porque um vector arbitrado, porventura uma aproximação "grosseira" da forma natural, pode conduzir a uma "boa" estimativa da frequência natural.

4) (2 val.) Na figura representa-se um veio de comprimento ℓ em vibração de torção descrita pela função deslocamento angular $\theta(x,t)$.



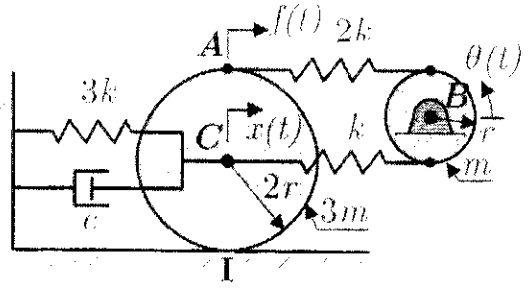
a) (25%) Considerando um elemento infinitesimal de veio de comprimento dx, estabelecer e caracterizar a equação de movimento de torção; Escrever e classificar as condições de fronteira do veio representado;

b) (25%) Explicar o significado físico da solução $\theta(x,t) = \Theta(x)g(t)$ para o regime livre ou natural, indicando o significado das funções $\Theta(x)$ e $g(t)$;

c) (25%) Estabelecer e caracterizar a equação característica. Indicar quais os requisitos e o significado físico das soluções;

d) (25%) Mostrar, justificando, como determinar a resposta $\theta(x,t)$ a uma solicitação genérica $f(x,t)$.

FEUP, 11 de Junho de 2013
José Dias Rodrigues



1) (5 val.) O mecanismo representado na figura é constituído pelos corpos:

- corpo 1: disco, de massa $3m$ e raio $2r$, que rola sem escorregar ao longo de um plano horizontal; o disco está ligado ao exterior através de um conjunto mola-amortecedor de propriedades $3k$ e c. O ponto **A** do disco é actuado por uma força exterior $f(t)$.
- corpo 2: roldana de massa m que roda em torno de um eixo fixo; a roldana está ligada ao corpo 1 nos pontos **A** e **C** através de molas elásticas de rigidez respectivamente $2k$ e k.

A coordenada $x(t)$ representa o deslocamento linear do centro do disco; a coordenada $\theta(t)$ representa o deslocamento angular da roldana. Para $x(t) = \theta(t) = 0$, as molas não estão deformadas. Considerar 'pequenas' oscilações.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

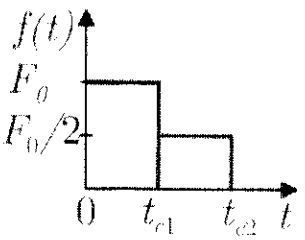
Para responder às alíneas seguintes, admitir que as equações de movimento do sistema, com $r = 2$ m, são:

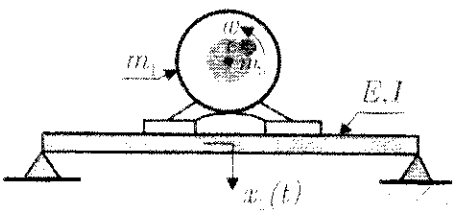
$$\begin{bmatrix} 6m & 0 \\ 0 & 2m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{\theta}(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 10k & 6k \\ 6k & 12k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x(t) \\ \theta(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (15%) Para $f(t) = F_0 \cos \omega t$ com $\dfrac{k}{m} = \dfrac{1}{6}\omega^2$, determinar a reacção horizontal no apoio **B**;

Para os valores $k = 5000$ N/m e $m = 500$ kg,

c) (20%) determinar as frequências e as formas naturais de vibração do sistema;
d) (15%) escrever as equações de movimento do sistema na base modal com massas modais unitárias.
e) (20%) Para a solicitação transiente $f(t)$ representada na figura, com condições iniciais nulas, determinar a resposta $\theta(t)$ para $t_{c1} \le t \le t_{c2}$.





2) (3 val.) Uma máquina de 150 kg com um desequilíbrio ($m_0 e$) rotativo de 0.5 kgm está montada a meio vão de uma viga simplesmente apoiada de comprimento $\ell = 2$ m. A viga possui uma secção recta com momento de 2ª ordem $I = 2.1 \times 10^{-6}$ m^4 e o material apresenta um módulo de elasticidade $E = 210 \times 10^9$ Pa.

A máquina opera a uma velocidade $\omega = 1200$ rpm. Desprezando a massa da viga,

a) (40%) dimensionar um absorsor de modo que, após acoplamento a meio vão da viga, a vibração da viga é eliminada e a amplitude estacionária do absorsor é inferior a 20 mm;
b) (20%) determinar as frequências naturais do sistema (com o absorsor);
c) (40%) determinar a gama de velocidades para a qual a flecha a meio vão da viga não ultrapassa 5 mm (com o absorsor).

v.s.f.f.