

1) (4 val.) O rotor de um instrumento de medição é controlado por uma mola de torção de rigidez k e um amortecedor viscoso de rotação de constante c, conforme representado na figura. A massa do rotor é $m = 50 \times 10^{-3}\ kg$ e o seu raio de giração em relação ao seu eixo de rotação é $r_g = 10$ mm (NOTA: $r_g^2 = J / m$).

A oscilação do rotor é descrita pelo parâmetro $\theta(t)$ referenciado à posição de equilíbrio estático.

a) (15%) Estabelecer a equação de movimento do sistema.

Quando perturbado, o rotor realiza uma oscilação completa em 3.25 s, sendo a razão entre duas amplitudes consecutivas de $15 / 3$.

Determinar:

b) (10%) a razão de amortecimento ξ;

c) (10%) a frequência natural angular não amortecida ω_n;

d) (10%) a constante de rigidez k da mola de torção e a constante de amortecimento viscoso c do amortecedor (de rotação).

Se o rotor, inicialmente em repouso, receber um impulso que lhe provoca uma rotação máxima de $15\ ^\circ$, determinar:

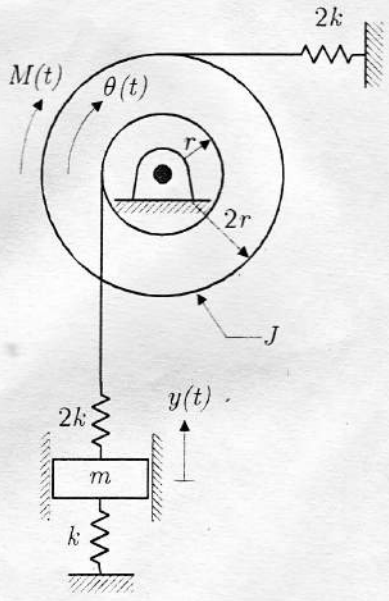
e) (10%) o tempo que demorou a rodar $15\ ^\circ$;

f) (15%) a energia fornecida pelo impulso.

Se ao rotor for aplicado um momento $m(t) = M_0 \cos \omega t$, determinar,

g) (15%) a frequência de excitação ω para a qual ocorre a resposta máxima e o respectivo valor de resposta;

h) (15%) a(s) gama(s) de frequências para a(s) qual(is) o momento transmitido pela mola é inferior a $1.5M_0$.



2) (4 val.) No sistema vibratório representado na figura, a posição da polia, de momento de inércia J, é referenciada pela coordenada angular $\theta(t)$ e a posição da massa m é referenciada pela coordenada linear $y(t)$. Ambas as coordenadas são referidas à posição de equilíbrio estático do sistema.

Utilizando o formalismo de Lagrange,

a) (25%) estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema.

Para a resolução das alíneas seguintes, assumir a seguinte equação matricial de movimento:

$$\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 2.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1500 & -200 \\ -200 & 200 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ M(t) \end{Bmatrix}$$

b) (15%) Estabelecer a equação característica do problema e a respectiva equação polinomial característica;

c) (15%) determinar as frequências e as formas naturais de vibração. Representar e comentar as formas naturais de vibração.

d) (15%) Escrever as equações de movimento na base modal.

Admitindo que sobre a polia actua um momento transiente $M(t) = M_0 \mu(t)$,

e) (15%) determinar a resposta $y(t)$;

f) (15%) determinar o limite superior da resposta $\theta(t)$.

3) (4 val.) A figura a) representa um veio em aço de comprimento $\ell = 0.75$ m e simplesmente apoiado. O material do veio (aço) apresenta módulo de elasticidade longitudinal $E = 210$ GPa, módulo de elasticidade transversal $G = 80$ GPa e massa volúmica $\rho = 7800$ kg/m^3. A secção recta do veio é circular de diâmetro d.

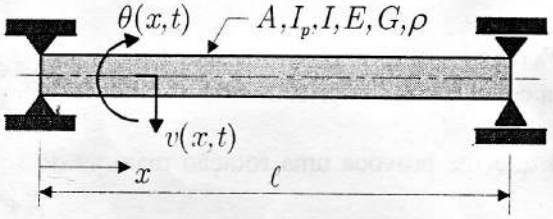
a) (30%) Dimensionar a secção recta do veio para que a frequência natural fundamental de flexão seja superior a 125 Hz;

b) (20%) Determinar a frequência fundamental de torção do veio;

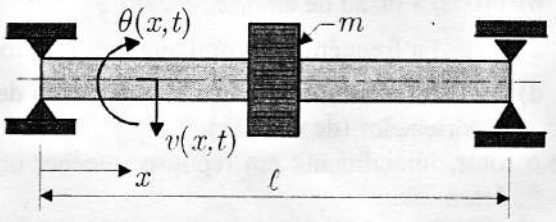
A figura b) representa o veio com um pinhão de massa $m = 1.37$ kg e momento de inércia $J_{xx} = 5.516 \times 10^{-4}$ kgm^2 montado em $\ell / 2$. O momento de inércia diametral do pinhão é desprezável.

c) (30%) Determinar (estimar) as 2 primeiras frequências naturais de flexão. Comentar o resultado.

d) (20%) Determinar a frequência fundamental de torção do sistema.



a)



b)

NOTA: Secção circular: $I = \frac{\pi d^4}{64}$, $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$.

FEUP, 12 de Março de 2014
José Dias Rodrigues
José Pedro Reina
Pedro Ribeiro