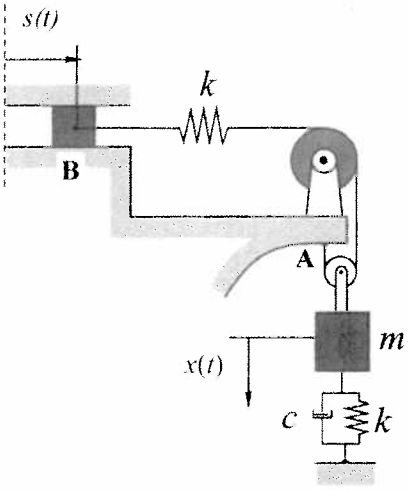


1) (4 val.) A massa m representada na figura é suportada por uma mola de rigidez k e por um amortecedor com constante de amortecimento c. A massa está também ligada a uma corda elástica com rigidez k, cuja extremidade **B** é sujeita ao movimento $s(t)$. Quando $s(t) = x(t) = 0$, a massa está em equilíbrio estático, estabelecido pela mola inferior.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Para a resolução das alíneas seguintes, admitir que o sistema é regido pela equação de movimento:

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + 3kx(t) = ks(t)$$

e considerar $m = 12$ kg, $c = 60$ Ns / m e $k = 10\ 000$ N / m.

b) (10%) Determinar a razão de amortecimento e a frequência natural amortecida.

Para $s(t) = 0$ m e as condições iniciais $x(0) = 0.05$ m, $\dot{x}(0) = 0$ m/s, determinar:

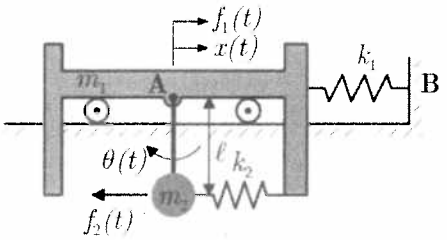
c) (15%) a expressão da oscilação da massa;

d) (15%) a energia dissipada pelo amortecedor entre o instante inicial e a segunda vez em que a massa passa pela posição de equilíbrio estático.

Considerando $s(t) = 0.05\cos(\omega t)$ m e o regime estacionário, determinar:

e) (15%) a frequência de ressonância e a correspondente amplitude da resposta;

f) (20%) a força que a corda exerce no ponto **A** nas condições da alínea e).



2) (4 val.) O sistema representado na figura é constituído por 2 corpos:

- corpo 1, uma carruagem de massa m_1 ligada ao exterior por uma mola de rigidez k_1 e ao corpo 2 através da mola de rigidez k_2;
- corpo 2, uma massa m_2 ligada à carruagem pela mola de rigidez k_2, concentrada na extremidade de uma haste rígida de massa desprezável e de comprimento ℓ articulada à carruagem.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas $x(t)$ e $\theta(t)$. Na situação de equilíbrio estático, $x(t) = \theta(t) = 0$ e as molas não estão deformadas. As oscilações angulares $\theta(t)$ podem considerar-se 'pequenas'.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para a resolução das alíneas seguintes, assumir a seguinte equação matricial de movimento:

$$\begin{bmatrix} 15 & -10 \\ -10 & 20 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 5000 & 0 \\ 0 & 4000 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} f_1(t) \\ 0 \end{Bmatrix}$$

b) (15%)Determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema.

Para uma excitação harmónica $f_1(t) = 100\cos(12t)$,

c) (15%)determinar o deslocamento angular $\theta(t)$;

d) (15%)determinar a força horizontal na rótula (ponto **A**).

e) (10%)Escrever as equações de movimento na base modal com massas modais unitárias.

FEUP-Departamento de Engenharia Mecânica
Mecânica III **Exame de Época Normal (19-06-2014)**
Parte Teórica – 8 valores (50 minutos) **FEUP**

1) (2.0 val) O comportamento dinâmico de um sistema com 1 grau de liberdade é governado pela equação $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$ e pelas condições iniciais x_0 e $\dot{x}_0$.

a) (30%) **Definir** frequência natural e frequência de ressonância;

b) (40%) **Discutir** a natureza das raízes da equação característica, **caracterizar** o correspondente tipo de movimento $x(t)$ livre ou natural. Para uma perturbação inicial $x_0 > 0$ e $\dot{x}_0 > 0$, **esboçar graficamente** a resposta do sistema no espaço de estados;

c) (30%) **Caracterizar** o movimento estacionário de resposta a uma solicitação periódica $f(t) = f(t+T)$ e **discutir** a contribuição dos harmónicos de $f(t)$ para a resposta $x(t)$; **Indicar** em que condições o movimento de resposta é "próximo" de um movimento harmónico simples.

2) (2.0 val) Num sistema vibratório em regime forçado:

a) (40%) Para uma excitação harmónica $f(t) = F\cos\omega t$, **caracterizar** a resposta estacionária para $\omega >> \omega_n$; Com base na representação da equação de movimento através de um diagrama de vectores, **explicar** a resposta estacionária de um sistema não amortecido para uma frequência de excitação $\omega = \omega_n$;

b) (30%) Para uma excitação harmónica passiva $y(t) = Y\cos\omega t$, **definir** transmissibilidade absoluta e relativa e **representá-las** graficamente numa mesma figura em função da frequência, **indicando** eventuais pontos (zonas) notáveis;

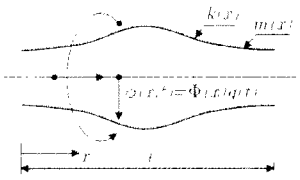
c) (30%) **Discutir** e **justificar** a eficiência do isolamento em termos da massa, da rigidez e do amortecimento do sistema vibratório.

3) (2.0 val) O comportamento dinâmico de um sistema com n graus de liberdade é governado pelo sistema de equações diferenciais $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$.

a) (30%) **Definir**: i) modo natural de vibração; ii) forma natural de vibração; iii) nodo de vibração;

b) (40%) **Indicar** e **escrever** a(s) propriedade(s) em que assenta a técnica da análise modal; **Escrever** a transformação de coordenadas associada indicando o significado das grandezas envolvidas; **Caracterizar** as equações de movimento na base modal; **Justificar** a designação "sobreposição modal";

c) (30%) Num sistema equipado com um absorsor de vibrações, **explicar** como é equilibrada a força de excitação $f(t) = F\cos\omega t$ actuante no primário. **Representar** graficamente as amplitudes $X_1(\omega)$ e $X_2(\omega)$, respectivamente do primário e do absorsor, **indicando** eventuais pontos notáveis e a posição (ω) de funcionamento.



4) (2.0 val.) Na figura representa-se um sistema contínuo unidimensional de comprimento ℓ cujo regime livre ou natural é governado pela equação $\mathcal{L}\left(k(x)\mathcal{L}\left(\phi(x,t)\right)\right) = m(x)\dfrac{\partial^2\phi(x,t)}{\partial t^2}$.

a) (30%) **Identificar** cada um dos termos da equação e o seu significado físico para o problema da vibração lateral de vigas;

b) (30%) **Explicar** o significado físico da solução sob a forma de variáveis separadas, $\phi(x,t) = \Phi(x)q(t)$, para o regime livre, **indicando** o significado das funções $\Phi(x)$ e $q(t)$;

c) (40%) **Caracterizar** o problema característico associado. **Indicar** quais os requisitos e o significado físico das respectivas soluções.

FEUP, 19 de Junho de 2014
José Dias Rodrigues

f) (15%)Para condições iniciais nulas, determinar o deslocamento angular $\theta(t)$ quando o sistema é sujeito a uma excitação transiente do tipo $f_1(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t \leq 0.1\text{s} \\ 500\text{ N} & t > 0.1\text{s} \end{cases}$

3) (4 val.) Na figura representa-se uma barra de secção recta quadrada e uniforme montada sobre rolamentos lineares que não impedem o movimento longitudinal $u(x,t)$. A barra é formada por 2 tramos idênticos de comprimento $\ell/2$ e cuja área da secção recta vale A. Em $x = 0$, a barra está ligada a uma mola linear elástica de rigidez k e em $x = \ell/2$ está montada uma massa concentrada m. O material da barra apresenta módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ.

a) (10%) Escrever e classificar as condições de fronteira do sistema.

b) (10%) Discutir, justificando, a aplicabilidade da função $\psi(x) = \delta + \frac{x}{\ell}$ como aproximação da primeira forma natural de vibração no método de Rayleigh. Esboçar graficamente a função $\psi(x)$.

Para $k = \alpha \frac{EA}{\ell}$ e $m = \beta \rho A \ell$,

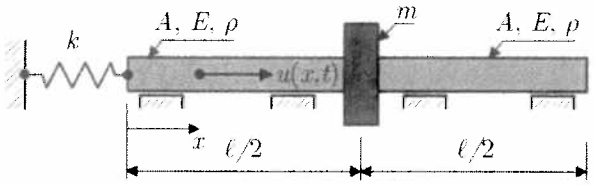
c) (30%) Calcular a estimativa ω_R da frequência natural de vibração utilizando o método de Rayleigh. Exprimir o resultado na forma $\omega_R = \sqrt{\frac{E}{\rho \ell^2}} g(\delta, \alpha, \beta)$ onde $g(\delta, \alpha, \beta)$ representa uma função.

d) (10%) Discutir, justificando, a validade da solução obtida pelo método de Rayleigh para os valores limite de k: $k \to 0$ e $k \to \infty$.

e) (15%) Para $\alpha = 0$ e $\forall \beta$, indicar, justificando, um valor fisicamente consistente para δ.

Para $m = 0$, utilizando a solução geral da vibração longitudinal para uma barra de secção uniforme,

f) (25%) estabelecer a equação de frequências naturais de vibração longitudinal.



FEUP, 19 de Junho de 2014
José Dias Rodrigues
José Pedro Reina
Pedro Ribeiro