1) (2 val) O comportamento dinâmico de um sistema com 1 grau de liberdade é governado pela equação $m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t)$ e pelas condições iniciais x_0 e $\dot{x}_0$.

a) (30%) **Descrever**, sucintamente, um método de identificação do amortecimento do sistema **indicando** qual o seu princípio;

b) (35%) **Definir** e **caracterizar** função de resposta impulsiva;

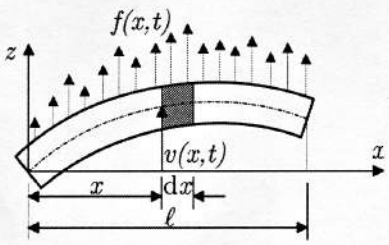
c) (35%) **Caracterizar** a resposta a um transiente rectangular $f(t) = F_0\big(\mu(t) - \mu(t - t_c)\big)$; **Representar**, indicando eventuais pontos notáveis, o espectro de resposta ao transiente 'rectangular'.

2) (2 val) O comportamento dinâmico de um sistema com n graus de liberdade é descrito por um sistema de equações diferenciais do tipo $[m]\{\ddot{x}(t)\} + [c]\{\dot{x}(t)\} + [k]\{x(t)\} = \{f(t)\}$.

a) (35%) **Estabelecer** e **caracterizar** o problema característico associado; **Indicar** a condição para existência de soluções não triviais; **Indicar** o significado físico das soluções;

b) (35%) **Descrever** sucintamente a técnica da análise modal e indicar a(s) vantagem(s) desta técnica na determinação e análise do regime forçado;

c) (30%) Para um vector $\{v\}$ que difere do vector modal $\{\phi\}_s$ de uma quantidade pequena ε, $\{v\} = \{\phi\}_s + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq s}}^{n} \varepsilon_r \{\phi\}_r$, **indicar**, justificando, o resultado fornecido pelo quociente de-Rayleigh $R(\{v\})$; **Indicar** a(s) propriedade(s) do quociente de Rayleigh.

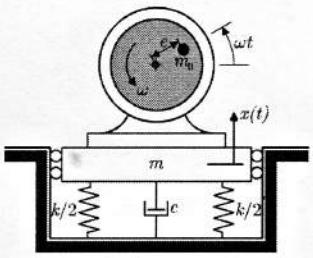


3) (2.0 val) Na figura representa-se uma viga de comprimento ℓ em vibração lateral de flexão $v(x,t)$.

a) (30%) Considerando um elemento infinitesimal de comprimento $\mathrm{d}x$, **estabelecer** o diagrama de corpo livre e a(s) equação(ões) de equilíbrio dinâmico usando a teoria das vigas finas de Euler-Bernoulli;

b) (30%) **Esboçar** graficamente, com o rigor possível, as 3 primeiras formas naturais de uma viga com as seguintes condições de fronteira:
i) encastrada-livre; ii) livre-livre;

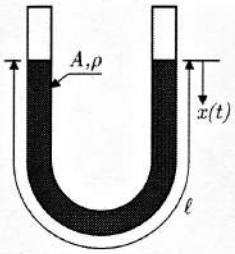
c) (40%) **Indicar** quais os requisitos da aproximação da forma fundamental de vibração a utilizar no método da energia de Rayleigh. **Justificar** o "relaxamento" de restricções das funções admissíveis em relação às funções teste.



4) (2 val.) O equipamento representado na figura possui um rotor de massa m_0 cujo centro de massa dista e do eixo de rotação, em torno do qual roda com uma velocidade angular ω constante. O equipamento apresenta uma massa total m.

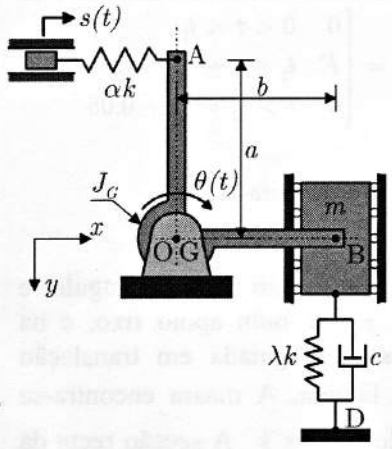
a) (25%) **Caracterizar** a excitação do sistema; **Representar** a amplitude $X(\omega)$ do movimento estacionário $x(t)$ em função da razão de frequências $\beta = \omega / \omega_n$. **Indicar** na figura o lugar geométrico dos valores correspondentes às frequências natural e de ressonância;

b) (25%) Para $\omega = \omega_n$, **indicar**, justificando, qual a posição (ωt) da massa excêntrica quando o equipamento passar pela posição de equilíbrio estático;



c) (50%) A figura representa um manómetro de mercúrio para medição das oscilações de pressão numa câmara (de escape). **Estabelecer** uma expressão para a frequência natural de vibração.

FEUP, 11.07.2014
José Dias Rodrigues



1) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por uma barra em **L** de momento de inércia J_G em relação a um eixo que passa pelo ponto $\mathbf{O} \equiv \mathbf{G}$ e por uma massa m.

Considerar como grau de liberdade do sistema o deslocamento angular $\theta(t)$ para "pequenas" oscilações. Quando $s(t) = \theta(t) = 0$, o sistema está em equilíbrio estático, estabelecido pela mola inferior.

a) (25%) Estabelecer a equação diferencial de movimento.

Para a resolução das alíneas seguintes, admitir que o sistema é regido pela equação de movimento:

$$0.032\ddot{\theta}(t) + 0.0225c\dot{\theta}(t) + 0.075k\theta(t) = 0.3ks(t)$$

e considerar $m = 1.2$ kg, $a = 0.1$ m e $b = 0.15$ m.

Com $s(t) = 0$, é aplicado um impulso ao sistema que lhe induz uma resposta livre ou natural com um período $T = 0.04$ s, uma razão de amortecimento $\xi = 12\ \%$ e um deslocamento $\theta_{\max} = 0.0962$ rad. Determinar,

b) (10%) a constante de rigidez k e a constante de amortecimento c;

c) (10%) O instante correspondente à resposta máxima e as condições iniciais aplicadas;

d) (10%) a energia dissipada até ao instante de resposta máxima.

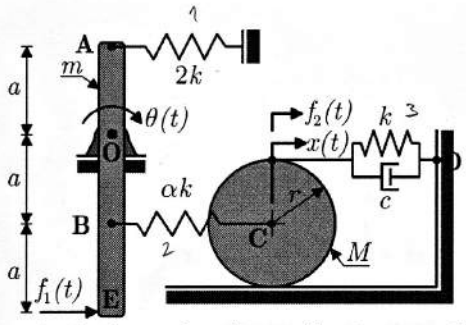
Considerando o movimento $s(t) = S\cos(\omega t)$ com $\omega = 25$ Hz, determinar:

e) (15%) a amplitude S de modo que a amplitude de aceleração da massa seja de 501 m/s^2;

f) (15%) a componente vertical da força no apoio **O**;

Para $c = 0$, determinar,

g) (15%) a(s) gama(s) de frequência de excitação de modo a manter a amplitude de aceleração da massa inferior ao valor indicado na alínea e). Representar graficamente a amplitude de aceleração da massa em função da frequência e indicar a(s) gama(s) de funcionamento.



2) (4 val.) O mecanismo representado na figura é constituído por:

- corpo 1, barra de massa m e de comprimento $3a$ que roda em torno do ponto fixo O;
- corpo 2, disco de massa M e de raio r que rola sem escorregar sobre uma superfície.

As vibrações do sistema em torno da posição de equilíbrio estático podem ser descritas pelas coordenadas generalizadas $\theta(t)$ e $x(t)$. Na situação de equilíbrio estático, $\theta(t) = x(t) = 0$ e as molas não estão deformadas. As oscilações angulares podem considerar-se 'pequenas'.

a) (30%) Estabelecer, literalmente, as equações de movimento do sistema utilizando o formalismo de Lagrange.

Para a resolução das alíneas seguintes, assumir a seguinte equação matricial de movimento:

$$\begin{bmatrix} 0.09m & 0 \\ 0 & 0.375m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{x} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.54k & -0.6k \\ -0.6k & 3k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta \\ x \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0.6f(t) \\ 0.5f(t) \end{Bmatrix}.$$

b) (15%) Escrever a equação de frequências e determinar as frequências e formas naturais de vibração do sistema. Representar graficamente as formas naturais.

Para $m = 3.6$ kg e $k = 6.8 \times 10^4$ N/m,

c) (15%) Determinar a resposta livre ou natural à perturbação inicial,

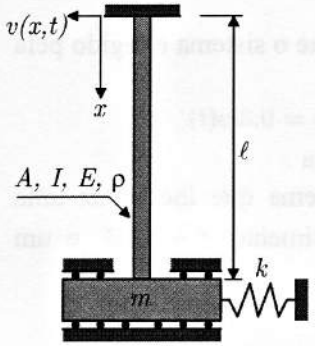
$\{\theta(0) \quad x(0)\}^T = \{u\}_2$ e $\{\dot{\theta}(0) \quad \dot{x}(0)\}^T = \{0\}$.

d) (10%) Escrever as equações de movimento na base modal com massas modais unitárias.

Para condições iniciais nulas e uma excitação transiente do tipo $f(t) = \begin{cases} 0 & 0 < t < t_1 \\ F & t_1 \le t \le t_2 = t_1 + 0.05 \\ 0 & t > t_2 = t_1 + 0.05 \end{cases}$,

determinar,

e) (30%) A resposta $\theta(t)$ para $t_1 \le t \le t_2$ e o limite para a resposta máxima $x(t)$ para $t > t_2$.



3) (4 val.) A figura representa uma lâmina (viga) de secção recta rectangular e de comprimento ℓ, encastrada na extremidade $x = 0$ num apoio fixo, e na extremidade $x = \ell$ está encastrada numa massa m guiada em translação rectilínea para o movimento lateral $v(x,t)$ da lâmina. A massa encontra-se ligada ao exterior por uma mola linear elástica de rigidez k. A secção recta da lâmina apresenta uma área A e momento de 2ª ordem I, e o material possui módulo de elasticidade E e massa volúmica ρ.

a) (15%) Escrever e classificar as condições de fronteira do problema.

Utilizando o método da energia de Rayleigh,

b) (15%) Escolher, justificando a opção, uma das 2 funções de aproximação seguintes para aproximação da forma natural fundamental de vibração de flexão da lâmina,

$$\text{i) } V(x) = \delta(1 - \cos\frac{\pi}{2\ell}x)\,; \qquad \text{ii) } V(x) = \delta(1 - \cos\frac{\pi}{\ell}x)\,.$$

c) (35%) Determinar uma estimativa da frequência fundamental de vibração de flexão.

d) (20%) Discutir a validade da solução obtida para valores limite da rigidez k da mola. No caso de não validade da solução, propor uma função admissível.

Para $k \to \infty$, $\ell = 0.8$ m, $E = 210$ GPa, $\rho = 7800$ kg/m^3,

e) (15%) dimensionar a espessura h da lâmina de modo que a frequência natural fundamental seja de 25 Hz.

NOTA

$$\int \sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a} \qquad \int \cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}$$

$$\int x\sin ax\,dx = \frac{\sin ax}{a^2} - \frac{x\cos ax}{a} \qquad \int x\sin ax\,dx = \frac{\cos ax}{a^2} + \frac{x\sin ax}{a}$$

$$\int x^2\sin ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\sin ax + \left(\frac{2}{a^3} - \frac{x^2}{a}\right)\cos ax \qquad \int x^2\cos ax\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos ax + \left(\frac{x^2}{a} - \frac{2}{a^3}\right)\sin ax$$

$$\int x\sin^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} - \frac{x\sin 2ax}{4a} - \frac{\cos 2ax}{8a^2} \qquad \int x\cos^2 ax\,dx = \frac{x^2}{4} + \frac{x\sin 2ax}{4a} + \frac{\cos 2ax}{8a^2}$$

$$\int \sin^2 ax\,dx = \frac{x}{2} - \frac{\sin 2ax}{4a} \qquad \int \cos^2 ax\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\sin 2ax}{4a}$$

FEUP, 11 de Julho de 2014
José Dias Rodrigues
José Pedro Reina
Pedro Ribeiro